Práctica 1

Resolución numérica de problemas variacionales con fronteras fijas

Consideremos el funcional $J : V \to \mathbb{R}$ de la forma

$$J(u) = \int_a^b L(x, u, u')dx,$$

con u tomando valores fijos en los extremos del intervalo (a, b), $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$. Sea n un entero positivo y consideremos la partición del intervalo (a, b) dada por

$$x_i = a + i\Delta x, \quad \text{para } i = 0, \ldots, n + 1,$$

siendo $\Delta x = (b - a)/(n + 1)$. En cada x_i consideramos las incógnitas $u(x_i) = u_i$, para $i = 1, \ldots, n$. Observemos que $u(x_0) = u(a) = u_a$ y $u(x_{n+1}) = u(b) = u_b$ están dados. Definimos una aproximación de L, mediante la siguiente interpolación constante a trozos:

$$L_n(x, u_1, \ldots, u_n) = L(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) \quad \text{si } x \in (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n.$$

A continuación, consideramos la función $J_n(u_1, \ldots, u_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que aproxima al funcional J, definida por

$$J_n(u_1, \ldots, u_n) = \int_a^b L_n(x, u_1, \ldots, u_n)dx = \sum_{i=1}^{n+1} L(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})\Delta x.$$

La condición necesaria para que J_n tenga un punto crítico en $u_c = (u_1, \ldots, u_n)$ es $\nabla J_n(u_c) = \mathbf{0}$. Observemos que el término u_i, para $i = 1, \ldots, n$ sólo aparece tres veces en el sumatorio que define a J_n

$$J_n(u_1, \ldots, u_n) = \ldots + L(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) + L(x_{i+1}, u_{i+1}, \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}) + \ldots$$

de modo que debe satisfacerse

$$\frac{\partial J_n}{\partial u_i}(u_c) = \frac{\partial L}{\partial u}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})\Delta x + \frac{\partial L}{\partial u'}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) - \frac{\partial L}{\partial u'}(x_{i+1}, u_{i+1}, \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}) = 0, \quad (1)$$

para $i = 1, \ldots, n$, o más brevemente, $F(u_c) = 0$, donde $F = (F_1, \ldots, F_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, siendo F_i el miembro izquierdo de la igualdad (1).

Estas ecuaciones conforman un sistema no lineal de n ecuaciones y n incógnitas. Las posibles soluciones las buscamos mediante el método de Newton

$$u^j = u^{j-1} - (DF(u^{j-1}))^{-1} F(u^{j-1}), \quad j = 1, \ldots$$

donde u^0, la iteración inicial, debe ser dada.

Observemos que la matriz a invertir es especialmente sencilla y que, de hecho, es la matriz hessiana de J_n y, por tanto, simétrica. Además, en un mínimo estricto es definida positiva. Se tiene

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_{i-1}} = \frac{\partial^2 J_n}{\partial u_i \partial u_{i-1}} = -\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) - \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x}, \quad (2)$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial u_i} = \frac{\partial^2 J_n}{\partial u_i^2} = \frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})\Delta x + 2\frac{\partial^2 L}{\partial u u'}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x}) \\ + \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(x_i, u_i, \frac{u_i - u_{i-1}}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x} + \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(x_{i+1}, u_{i+1}, \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x}, \quad (3)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_i}{\partial u_{i+1}} = \frac{\partial^2 J_n}{\partial u_i \partial u_{i+1}} = -\frac{\partial^2 L}{\partial u \partial u'}(x_{i+1}, u_{i+1}, \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x}) \\ - \frac{\partial^2 L}{\partial u'^2}(x_{i+1}, u_{i+1}, \frac{u_{i+1} - u_i}{\Delta x})\frac{1}{\Delta x}, \quad (4)\end{aligned}$$

siendo los demás términos de la matriz nulos. Además, se comprueba fácilmente que

$$\frac{\partial F_i}{\partial u_j} = \frac{\partial F_j}{\partial u_i},$$

con lo cual la matriz es simétrica y tridiagonal.

Un programa que resuelva este problema puede hacerse de la siguiente manera:

1. *Introducción de datos.* Necesitaremos los siguientes

   - Extremos del intervalo: a, b.
   - Número de subintervalos, n o nodos, $n + 1$.
   - Incremento entre nodos, $dx = (b - a)/(n + 1)$.

- Criterio de parada del método de Newton, típicamente referido al error relativo, por ejemplo
$$\frac{\|u^j - u^{j-1}\|_\infty}{\|u^j\|_\infty} < \varepsilon.$$
- Nodos, $x_i = a + i * dx$.
- Condición de frontera, $u(a) = u_a$, $u(b) = u_b$.
- Iteración inicial, u^0, definida en cada nodo (excepto los extremos). Puede servir una interpolación lineal entre los extremos, es decir, la recta que pasa por (a, u_a) y (b, u_b).

2. Comienzo de las iteraciones del método de Newton, en cada una de las cuales hay que calcular

   - $F_i(u_1, \ldots, u_n)$, para $i = 1, \ldots, n$, dada por la expresión (1).
   - Los elementos de DF, dados por (2)-(4).

3. Obtención del nuevo elemento, u^j, a partir del método de Newton operado sobre u^{j-1}.

4. Test de parada del método de Newton sobre el error relativo.

5. Representación gráfica de la solución, una vez paradas las iteraciones.

Finalmente, observemos que en el cálculo de F y DF intervienen las funciones L y sus derivadas, de modo que habrá que introducir dichas funciones como archivos separados, calculando a mano las derivadas de L, o bien, crear un programa que las calcule de modo simbólico.

Ejercicios.

Crear un programa de acuerdo al guión anterior y resolver los siguientes problemas:

1. El problema de la braquistocrona. En particular, investigar el comportamiento de la solución numérica frente a la condición $y_1/x_1 < \pi/2$ obtenida en el análisis del problema.

2. El problema de hallar la curva que minimiza el tiempo invertido por un móvil en el desplazamiento entre dos puntos a velocidad $\nu \equiv \nu(x)$. Investigar el comportamiento respecto distintas elecciones de ν (constante, monótona, oscilante, etc).

3. El problema de hallar la curva que genera una superficie de revolución de área mínima. Investigar la relación entre los datos que implica la existencia o no de solución.

A continuación se detallan los problemas mencionados, tal y como se resolvieron en clase.

Ejemplo 1. El problema de la braquistocrona. Retomemos el problema de la curva de descenso en tiempo mínimo introducido en la Presentación. Se trata de minimizar el funcional

$$J(u) = \int_0^{x_1} (\frac{1 + u'(x)^2}{2gx})^{1/2} dx,$$

que representa el tiempo de descenso de una partícula material, con velocidad inicial cero, a lo largo de la curva u que une los puntos $(0,0)$ y (x_1, y_1) debido únicamente a la acción de la gravedad. Aquí asumimos que u es diferenciable con continuidad. Las condiciones necesarias para la existencia de un mínimo vienen dadas por la Ecuación de Euler

$$\frac{d}{dx}(\frac{u'(x)}{(2gx(1 + u'(x)^2))^{1/2}}) = 0 \quad \text{para todo } x \in (0, x_1),$$

y la condición de Lagrange

$$(1 + u'(x)^2)^{-3/2}(2gx)^{-1/2} \geq 0 \quad \text{para todo } x \in (0, x_1).$$

La condición de Lagrange se satisface trivialmente. Integrando la Ecuación de Euler obtenemos

$$\frac{u'(x)}{(x(1 + u'(x)^2))^{1/2}} = k \quad \text{para todo } x \in (0, x_1), \tag{5}$$

y para cierta constante k, la cual incluye el factor $\sqrt{2g}$. Particularizando en $x = x_1$ obtenemos

$$k^2 x_1 = \frac{u'(x_1)^2}{1 + u'(x_1)^2} < 1,$$

con lo que $0 < k^2 x < 1$ para $x \in (0, x_1)$. De (5) obtenemos

$$u'(x)^2 = \frac{k^2 x}{1 - k^2 x},$$

y usando la parametrización

$$x(t) = \frac{1}{2k^2}(1 - \cos t), \qquad y(t) = u(x(t)),$$

tenemos que y debe satisfacer

$$y'(t)^2 = \big(u'(x(t))x'(t)\big)^2 = \frac{k^2 x(t)}{1 - k^2 x(t)} x'(t)^2 = \frac{1 - \cos t}{1 + \cos t} \frac{\operatorname{sen}^2 t}{4k^4} = \frac{(1 - \cos t)^2}{4k^4},$$

de donde

$$y'(t) = \pm \frac{1}{2k^2}(1 - \cos t).$$

Usando la condición de contorno $y(0) = u(x(0)) = 0$ y que $u \geq 0$ obtenemos

$$y(t) = \frac{1}{2k^2}(t - \operatorname{sen} t).$$

Para que $(x(t), y(t))$ sea una solución de nuestro problema es necesario que satisfaga la segunda condición de contorno, es decir, que exista un t_0 tal que

$$x_0 = x(t_0) = \frac{1}{2k^2}(1 - \cos t_0), \qquad y_0 = y(t_0) = \frac{1}{2k^2}(t_0 - \operatorname{sen} t_0).$$

Observemos que, aunque la función y es invertible para todo $t \geq 0$, la función x sólo lo es en $(0, \pi)$, de modo que debemos imponer $t_0 \in (0, \pi)$. Físicamente, x debe ser estrictamente creciente, puesto que la partícula material no puede *subir* en contra de la gravedad. Tomando el cociente de estas dos condiciones obtenemos

$$\frac{y_0}{x_0} = \frac{t_0 - \operatorname{sen} t_0}{1 - \cos t_0}.$$

No es difícil comprobar que la función $f(t) = (t - \sin t)/(1 - \cos t)$ es creciente en $(0, \pi)$, y que su valor máximo es $f(\pi) = \pi/2$. Por tanto, si $y_0/x_0 < \pi/2$ la parametrización construida es una solución del problema. De lo contrario, el problema no tiene solución. $\square$

Ejemplo 2. El funcional

$$J(u) = \int_0^{x_1} \frac{\sqrt{1 + u'^2}}{\nu(x)} dx$$

representa el tiempo invertido en el desplazamiento de un punto material que se mueve a velocidad $\nu(x) > 0$, a lo largo de la curva u, desde $(0,0)$ a (x_1, u_1). La ecuación de Euler es

$$u'(x) = C\nu(x)\sqrt{1+u'^2} \implies u'(x)^2 = \frac{C^2\nu(x)^2}{1-C^2\nu(x)^2},$$

de donde

$$u(x) = \pm \int_0^x \frac{C\nu(x)}{\sqrt{1-C^2\nu(x)^2}}dx.$$

Observemos que si la velocidad es constante entonces la solución es una línea recta. Para $\nu(x) = bx$ la solución es una circunferencia. En efecto, $\nu'(x) = b$, luego

$$u(x) = \pm\frac{1}{Cb}\int_0^x \frac{C^2\nu(x)\nu'(x)}{\sqrt{1-C^2\nu(x)^2}}dx = \mp\frac{1}{Cb}\sqrt{1-(Cbx)^2},$$

que es la ecuación de una circunferencia de radio $1/Cb$. Finalmente, para $\nu(x) = \sqrt{x}$, retomamos el problema de la braquistocrona. $\square$

Ejemplo 3. Determinar la curva, con los puntos extremos fijos, que al girar alrededor del eje de las abscisas forme una superficie de área mínima.

El área de una superficie de revolución viene dada por

$$J(u) = 2\pi \int_{x_1}^{x_2} u\sqrt{1+u'^2}dx.$$

La ecuación de Euler es

$$u\sqrt{1+u'^2} - \frac{uu'^2}{\sqrt{1+u'^2}} = C,$$

que, simplificando, queda

$$\frac{u}{\sqrt{1+u'^2}} = C \implies u' = \sqrt{\frac{u^2-C^2}{C^2}}.$$

Separando variables, obtenemos

$$dx = \frac{C du}{\sqrt{u^2-C^2}} \implies x + C_1 = C\ln\frac{u+\sqrt{u^2-C^2}}{C},$$

de donde se deduce que

$$u(x) = C\cosh\frac{x+C_1}{C}, \tag{6}$$

que es una catenaria ($\cosh t = \frac{1}{2}(e^t + e^{-t})$). Finalmente, las constantes C y C_1 se determinan a partir de las condiciones de contorno $u(x_1) = u_1$ y $u(x_2) = u_2$. Se dan tres casos:

1. Si se puede trazar una única curva de la forma (6) por los puntos (x_1, u_1) y (x_2, u_2), entonces la catenaria da la solución del problema.

2. Si hay dos extremales que puedan trazarse por los puntos dados, entonces uno es solución y el otro no.

3. Si no hay ninguna curva de la forma (6) que pase por (x_1, u_1) y (x_2, u_2), entonces no se alcanza un mínimo en la clase de superficies de revolución regulares.

$\square$