Guión de la práctica

1. Objetivo

Nuestro objetivo es resolver numéricamente la ecuación de ondas:

$$\begin{aligned} &u_{tt}(x,t) = c^2 u_{xx}(x,t) \quad x \in (0,\ L) \quad t \geq 0 \\ &u(0,t) = 0 \quad u(L,t) = 0 \quad \forall t \qquad \text{(condiciones de contorno)} \\ &u(x,0) = \varphi(x) \quad x \in (0,\ L) \qquad \text{(posición inicial dada)} \\ &u_t(x,0) = \psi(x) \quad x \in (0,\ L) \qquad \text{(velocidad inicial dada).} \end{aligned} \tag{1}$$

La ecuación (1) es un modelo matemático para describir las vibraciones de una cuerda tensada de longitud L (cuerda de una guitarra). Se busca la posición de la cuerda $u(x,t)$ en el punto x y en el instante t sabiendo su posición inicial $\varphi(x)$ y su velocidad inicial $\psi(x)$. El coeficiente c representa la velocidad de vibración y se calcula mediante la fórmula $c^2 = T/\rho$ donde T es la tensión de la cuerda y ρ su densidad de masa.

2. Descripción de la aproximación por diferencias finitas

Dividimos el intervalo $(0,\ L)$ en $N+1$ subintervalos de longitud $h = L/(N+1)$ e introducimos también un incremento de tiempo $\Delta t > 0$. Aproximando las derivadas segundas de la forma usual en la ecuación

$$u_{tt}(ih, j\Delta t) = c^2 u_{xx}(ih, j\Delta t) \quad i = 1, \cdots, N \quad j = 1, \cdots$$

obtenemos el esquema:

$$\frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\Delta t)^2} = c^2 \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2}$$

donde $u_{i,j} \simeq u(ih, j\Delta t)$. Si denotamos $u(j) := \{u_{i,j}, \quad i = 1, \cdots, N\}$, es fácil ver que el esquema anterior es explícito y tiene la siguiente forma matricial:

$$u(j+1) = Au(j) - u(j-1), \qquad j = 1, \cdots$$

donde $A = \text{tridiag}(\lambda^2, 2(1-\lambda^2), \lambda^2)$ con $\lambda = c\Delta t/h$.

Notar que para dar el primer paso ($j = 1$) y calcular $u(2)$ hay que disponer de $u(0)$ y $u(1)$. Evidentemente tenemos que $u(0) = \{\varphi(ih), \quad i = 1, \cdots, N\}$. Denotando $v = \{\psi(ih), \quad i = 1, \cdots, N\}$ el vector velocidad inicial, podemos aproximar la posición en el instante $t = \Delta t$ por

$$u(1) = u(0) + \Delta t v \qquad \text{o por} \qquad u(1) = (1/2)Au(0) + \Delta t v.$$

3. Aplicación

Escribir un programa en `Matlab` que permita seguir la evolución de una cuerda tensada que tiene una velocidad inicial nula y una posición inicial $\varphi(x) = (L-x)x$ teniendo en cuenta que se ha de satisfacer la condición $\lambda < 1$ para que el esquema sea estable.