Primer Parcial de Análisis Numérico III

1 Preliminares

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un abierto con frontera Γ suficientemente regular. Consideramos la aplicación traza $\gamma : \ H^1(\Omega) \to L^2(\Gamma)$ y denotamos por

$$V := \left\{ \gamma v; \quad v \in H^1(\Omega) \right\}$$

la imagen de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$ por dicha aplicación.

1. Probar que para todo $g \in V$ existe una única función $Tg \in H^1(\Omega)$ tal que

$$\int_\Omega \nabla(Tg) \cdot \nabla(Tg)\, dx = \min \left\{ \int_\Omega \nabla v \cdot \nabla v\, dx; \quad v \in H^1(\Omega), \quad \gamma v = g \right\}.$$

2. Probar que V dotado del producto escalar

$$(g_1,\, g_2)_V := \int_\Omega (Tg_1)(Tg_2)\, dx + \int_\Omega \nabla(Tg_1) \cdot \nabla(Tg_2)\, dx$$

   es un espacio de Hilbert.

2 Traza normal y una fórmula de Green

Denotamos por V' el espacio de las formas lineales y continuas sobre V (es decir el espacio dual de V) y lo dotamos de la norma

$$\|\mu\|_{V'} = \sup_{g \in V} \frac{|\langle \mu,\, g \rangle_{V' \times V}|}{\|g\|_V}.$$

Introducimos ahora el espacio

$$H(\mathrm{div}, \Omega) := \left\{ \mathbf{q} \in L^2(\Omega)^2; \quad \mathrm{div}\mathbf{q} \in L^2(\Omega) \right\},$$

donde $\mathrm{div}\mathbf{q} := \frac{\partial \mathbf{q}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathbf{q}_2}{\partial x_2}$ en el sentido de las distribuciones.

1. Probar que $H(\mathrm{div}, \Omega)$ dotado del producto escalar:

$$(\mathbf{p},\, \mathbf{q})_{H(\mathrm{div},\Omega)} := \int_\Omega \mathbf{p} \cdot \mathbf{q}\, dx + \int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{p}\, \mathrm{div}\mathbf{q}\, dx$$

   es un espacio de Hilbert.

2. Utilizar el teorema de Gauss y la densidad de $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ en $H^1(\Omega)$ para probar que

$$\int_\Gamma \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\gamma v\,d\sigma = \int_\Omega (\mathbf{q}\cdot\nabla v + \mathrm{div}\mathbf{q}\,v)\,dx \quad \forall v\in H^1(\Omega), \quad \forall \mathbf{q}\in\mathcal{D}(\overline{\Omega})^2. \tag{1}$$

Aquí, $\boldsymbol{\nu}$ denota el vector normal exterior en Γ.

3. Admitimos que $\mathcal{D}(\overline{\Omega})^2$ es denso en $H(\mathrm{div},\Omega)$. Deducir del apartado anterior que existe una aplicación lineal continua $\gamma_\nu : H(\mathrm{div},\Omega)\to V'$ tal que $\gamma_\nu\mathbf{q} = \mathbf{q}_{|_\Gamma}\cdot\boldsymbol{\nu}$ para toda función $\mathbf{q}\in\mathcal{D}(\overline{\Omega})^2$.

4. Deducir además que la fórmula de Green (1) es válida para todo $\mathbf{q}\in H(\mathrm{div},\Omega)$ si se interpreta la integral $\int_\Gamma \mathbf{q}\cdot\boldsymbol{\nu}\,\gamma v\,d\sigma$ como el producto de dualidad $\langle\gamma_\nu\mathbf{q},\,\gamma v\rangle_{V'\times V}$.

3 El problema continuo

Dada f en $L^2(\Omega)$, denotamos por $u\in H^1(\Omega)$ la única solución de la ecuación variacional

$$\int_\Omega (\nabla u\cdot\nabla v + uv)\,dx = \int_\Omega fv\,dx \quad \forall v\in H^1(\Omega).$$

1. Probar que la función $\mathbf{p} := \nabla u$ pertenece al espacio

$$W := \{\mathbf{q}\in H(\mathrm{div},\Omega);\quad \gamma_\nu\mathbf{q}=0\}.$$

2. Deducir que la pareja $(\mathbf{p},u)$ es una solución del problema:

$$\begin{aligned}
&\text{Buscar } \mathbf{p}\in W \text{ y } u\in L^2(\Omega) \text{ tales que}\\
&\textstyle\int_\Omega \mathbf{p}\cdot\mathbf{q}\,dx + \int_\Omega u\,\mathrm{div}\mathbf{q}\,dx = 0 \qquad \forall\mathbf{q}\in W\\
&\textstyle -\int_\Omega \mathrm{div}\mathbf{p}\,v\,dx + \int_\Omega uv\,dx = \int_\Omega fv\,dx \qquad \forall v\in L^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{2}$$

3. Probar que el problema (2) no puede tener más de una solución.

4 El problema discreto

Supongamos ahora que $\Omega := (0,\,1)\times(0,\,1)$. Subdividimos Ω en dos triángulos T_1 y T_2 donde los vértices de T_1 son: $(0,0)$, $(1,0)$ y $(0,1)$.

1. Buscar las condiciones que han de satisfacer los coeficientes a, b, c y α, β, δ para que

$$W_h = \left\{\mathbf{q}\in L^2(\Omega)^2;\quad \mathbf{q}|_{T_1} = a\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}b\\c\end{pmatrix},\ \mathbf{q}|_{T_2} = \alpha\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\beta\\\delta\end{pmatrix}\right\}$$

sea un subespacio de W.

2. Utilizar el subespacio de dimensión finita de W hallado en el apartado anterior y el subespacio de $L^2(\Omega)$ definido por

$$M_h := \left\{v\in L^2(\Omega);\quad v|_{T_1}\in\mathbb{P}_0(T_1),\ v|_{T_2}\in\mathbb{P}_0(T_2)\right\}$$

para escribir una aproximación del problema (2).

3. Obtener el sistema lineal asociado calculando explícitamente la matriz.