Matemática Aplicada
$4^{\underline{o}}$ de Matemáticas

Facultad de Ciencias
13 de diciembre de 2001

Problemas de Análisis Numérico III

Problema 1. Sea
$$a(u,v) = \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + (\int_\Omega u \, dx)(\int_\Omega v \, dx).$$

1. Probar que $a(\cdot,\cdot)$ es $H^1(\Omega)$-elíptica.
2. Deducir que para toda función $f \in L^2(\Omega)$ el problema:
$$\begin{cases} \text{encontrar } u \in H^1(\Omega) \text{ tal que,} \\ a(u,v) = \int_\Omega fv \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega) \end{cases}$$
tiene una solución única. Probar entonces que $\int_\Omega u \, dx = \frac{1}{\text{med}(\Omega)} \int_\Omega f \, dx$.
3. Interpretar el problema en el caso $\int_\Omega f \, dx = 0$.

Problema 2. Sea L el operador diferencial definido por
$$L(w) = -\sum_{i,j=1}^{d} \partial_i(a_{ij}\partial_j w) + \sum_{i=1}^{d} a_i \partial_i w + a_0 w,$$
donde w es una función regular definida en un abierto Ω. Supongamos que los coeficientes a_{ij}, a_i y a_0 pertenecen a $L^\infty(\Omega)$ y que existe una constante positiva α tal que
$$\sum_{ij=1}^{d} a_{ij}(x)\xi_j\xi_j \geq \alpha|\xi|^2,$$
para todo ξ en $\mathbb{R}^2$ y para c.t.p. x de Ω. Encontrar condiciones suficientes sobre el resto de los coeficientes para que el problema de Dirichlet asociado a este problema tenga solución única.

Problema 3. Sea Ω un abierto 1-regular a trozos. Dado $u_0 \in H^1(\Omega)$, probar que existe una única función $u \in u_0 + H_0^1(\Omega)$ tal que:
$$|u|_{1,\Omega}^2 = \inf_{v \in u_0 + H_0^1(\Omega)} |v|_{1,\Omega}^2.$$
Caracterizar u como solución de una *e.d.p.*

Problema 4. Sea $x_0 \in (0,1)$. Probar que el problema:
$$\begin{cases} \text{encontrar } u \in H_0^1(0,1) \text{ tal que,} \\ -u'' = \delta_{x_0}, \end{cases}$$
tiene una solución única. Calcular explicitamente dicha solución.

Problema 6. Sea Ω un abierto acotado de $\mathbb{R}^2$ con frontera Lipschitz Γ. Dadas las funciones $f \in L^2(\Omega)$ y $g \in L^2(\Gamma)$, probar que la ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{aligned} -(\partial^2_{xx}u - \partial^2_{xy}u + 2\partial^2_{yy}u) + \partial_x u &= f \quad \text{en } \Omega \\ \partial_x u\nu_1 - \tfrac{1}{2}(\partial_x u\nu_2 + \partial_y u\nu_1) + 2\partial_y u\nu_2 + u &= g \quad \text{sobre } \Gamma \end{aligned} \tag{1}$$

tiene una única solución. (Hemos denotado por ν_1 y ν_2 las componentes del vector unitario normal y exterior a Γ.)

Problema 5. Denotamos por I el intervalo $(0,\ 1)$.

(a) Asumamos que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $L^2(\mathbb{R})$. Deducir que $\mathcal{D}(\mathbb{R})$ es denso en $H^1(\mathbb{R})$.

(b) Probar que $\mathcal{D}(\overline{I})$ es denso en $H^1(I)$.

(c) Deducir que $\mathcal{D}(\overline{I})$ es denso en $H^2(I)$.

(d) Hemos probado en clase que $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{I})$. Deducir a partir de este resultado que $H^2(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^1(\overline{I})$.

(e) Admitamos que la inyección $H^1(I) \hookrightarrow L^2(I)$ es compacta (en realidad el resultado es una consecuencia directa de $H^1(I) \hookrightarrow \mathcal{C}^0(\overline{I})$ y del Teorema de Ascoli). Deducir que la inyección $H^2(I) \hookrightarrow H^1(I)$ es compacta.

(f) Sea $f \in L^2(I)$. Obtener la formulación variacional asociada a la ecuación:

$$\frac{d^4u}{dx^4} = f \quad \text{en } I$$

en los siguientes casos de condiciones de contorno:

(f.1) $u(0) = u'(0) = u(1) = u'(1) = 0$,

(f.2) $u(0) = u''(0) = u'(1) = u'''(1) = 0$,

(f.3) $u(0) = -u''(0) + u'(0) = 0 \quad$ y $\quad u(1) = u''(1) + u'(1) = 0$,

y probar que los tres problemas tienen solución única.

Problema 7. Sea $k(x,y) : [0,\ 1] \times [0,\ 1] \longrightarrow \mathbf{R}$ una función continua. Definimos el operador

$$\begin{aligned} T:\ L^2(0,\ 1) &\longrightarrow L^2(0,\ 1) \\ u &\longrightarrow T(u) = \textstyle\int_0^1 k(x,y)u(y)\,dy. \end{aligned}$$

(a) Demostrar que T es lineal continuo y calcular su norma.

Para todo $\mu > 0$, sea $a_\mu(\cdot,\cdot)$ la forma bilineal definida sobre $L^2(0,\ 1) \times L^2(0,\ 1)$ por

$$a_\mu(u,v) = \int_0^1 (u - \mu T(u))v\,dx.$$

(b) Sea $f \in L^2(0,\ 1)$. Probar que para todo $\mu < 1/\|T\|$ el problema

$$\begin{aligned} &\text{encontrar } u \in L^2(0,\ 1); \\ &a_\mu(u,v) = \textstyle\int_0^1 fv\,dx \quad \forall v \in L^2(0,\ 1) \end{aligned}$$

tiene una solución única.

(c) Estudiar la existencia de una solución del problema anterior cuando $\mu \geq 1/\|T\|$.