Problemas de Análisis Numérico III

Problema 1. Sean T_1 y T_2 dos triángulos de vértices $\{a_1, a_2, a_3\}$ y $\{a_1, a_4, a_3\}$ respectivamente, donde $a_1 := (0,0)^\top$, $a_2 := (1,0)^\top$, $a_3 := (0,1)^\top$ y $a_4 := (-1,1)^\top$. Denotamos por Ω el interior de $T_1 \cup T_2$ y $\Sigma := T_1 \cap T_2$. Sea $V := \left\{v \in H^1(\Omega); \quad v|_{\overline{a_1 a_2}} = 0\right\}$. Consideramos el problema variacional:

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u \in V; \\ &\int_\Omega \kappa(x) \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Sigma gv \, d\xi \quad \forall v \in V, \end{aligned} \tag{1}$$

donde g es una función de $L^2(\Sigma)$ y κ es dada por la constante $\kappa_1 > 0$ en T_1 y la constante $\kappa_2 > 0$ en T_2.

1. Probar que (1) tiene una solución única.
2. Utilizar la triangulación $\tau := \{T_1, T_2\}$ para construir un problema aproximado asociado a (1) por el método de elementos finitos. Calcular explícitamente una aproximación u_h (lineal a trozos) de u.

Problema 2. Sea $\Omega := (0,1) \times (0,1)$. Consideramos el problema de buscar $u : \Omega \to \mathbf{R}$ solución de

$$\begin{array}{rcll} -\Delta u(x,y) & = & f(x,y) & \text{en } \Omega \\ u(x,0) & = & x(1-x) & 0 \le x \le 1 \\ u(x,1) & = & 0 & 0 \le x \le 1 \\ u(1,y) & = & 0 & 0 \le y \le 1 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(0,y) & = & g(y) & 0 \le y \le 1, \end{array} \tag{2}$$

donde $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ y $g \in \mathcal{C}^0([0,1])$ son funciones conocidas. Subdividimos Ω en cuatro cuadrados iguales $\{R_i, \quad i = 1, \cdots, 4\}$ uniendo los puntos medios de los lados opuestos de Ω.

1. Denotamos $Q_1 := \{ax + by + cxy + d, \quad a, b, c, d \in \mathbf{R}\}$. Probar que el espacio
$$\left\{v \in L^2(\Omega); \quad v|_{R_i} \in Q_1, \ i = 1, 2, 3, 4\right\}$$
tiene un subespacio V_h contenido en $H^1(\Omega)$ y calcular explícitamente una base de V_h.
2. Plantear el problema discreto asociado a (2) sobre un subespacio adecuado de V_h y resolver el sistema lineal correspondiente.

Nota. Para aproximar las integrales que aparecen en el término independiente se puede aplicar la fórmula del punto medio y su versión bidimensional dadas respectivamente por: $\int_{-1}^{1} z(t)\, dt \simeq 2z(0)$ y $\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} Z(t,s)\, dtds \simeq 4Z(0,0)$.