

UNIVERSIDAD DE OVIEDO
Departamento de Matemáticas

ANÁLISIS MATEMÁTICO Y NUMÉRICO
DE LAS ECUACIONES DE MAXWELL
CUASIESTÁTICAS

Tesis Doctoral
Virginia Selgas Buznego

D. Benjamín Dugnot Álvarez, director del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo, autoriza la presentación de la Tesis Doctoral titulada “Análisis matemático y numérico de las ecuaciones de Maxwell cuasiestáticas”, que ha sido realizada por Dña. Virginia Selgas Buznego bajo la dirección de D. Salim Meddahi.

Oviedo, febrero de 2006

Fdo. D. Benjamín Dugnot Álvarez

D. Salim Meddahi, Profesor Titular de Matemática Aplicada del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo,

CERTIFICA:

que la presente memoria, titulada “Análisis matemático y numérico de las ecuaciones de Maxwell cuasiestáticas”, ha sido realizada por Dña. Virginia Selgas Buznego bajo su dirección, dando su conformidad para que sea presentada para optar al Grado de Doctor por la Universidad de Oviedo.

Oviedo, febrero de 2006

Fdo. D. Salim Meddahi

Agradecimientos

Este trabajo ha sido subvencionado por el Ministerio de Educación, Cultura y Deporte a través de una Beca de Formación de Profesorado Universitario con referencia AP2001–2318.

Deseo agradecer todo el apoyo recibido en el Departamento de Matemáticas de la Universidad de Oviedo. Muy especialmente, quiero expresar mi gratitud al director de esta tesis, el Profesor Salim Meddahi, por sus propuestas así como por todo el tiempo que ha dedicado a ayudarme. Además, debo un sincero reconocimiento al Profesor Javier Valdés, que me animó a comenzar esta tesis y ha confiado en mí desde un primer momento.

También deseo agradecer la hospitalidad que disfruté en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad de Santiago de Compostela durante la realización de los cursos de doctorado. En particular, no puedo olvidar las sugerencias y el estímulo de mi codirectora del trabajo de investigación, la Profesora Pilar Salgado.

Asimismo, quiero agradecer la cálida acogida del Departamento de Matemáticas de la Universidad de Trento durante los meses que estuve allí. Concretamente, debo a los Profesores Alberto Valli y Ana Alonso su respaldo e interesantes ideas.

Finalmente, me gustaría dedicar este trabajo a mi familia y a mis amigos, por su apoyo incondicional y por su paciencia y su cariño.

Introducción

Hasta el siglo XIX, los efectos eléctricos y magnéticos se consideraban fenómenos físicos independientes, ligados a las cargas eléctricas y a los imanes, respectivamente. Sin embargo, en 1820 Oersted observó que las corrientes eléctricas podían influir sobre una aguja imantada. A continuación, las aportaciones de Ampère y el descubrimiento de la inducción por Faraday establecieron las bases para una teoría unificada del electromagnetismo. Hacia 1860 Maxwell reunió y completó los resultados anteriores, sintetizando las teorías eléctrica y magnética en un único sistema de ecuaciones. En particular, estas ecuaciones predicen que los campos eléctricos variables generan campos magnéticos y que, recíprocamente, los campos magnéticos variables inducen corrientes eléctricas.

Desde un punto de vista práctico, este fenómeno de *inducción electromagnética* resulta fundamental para diseñar adecuadamente un dispositivo eléctrico. En efecto, las corrientes inducidas pueden ser útiles o bien producir pérdidas, según sea la aplicación dada a una máquina eléctrica. Así por ejemplo, las corrientes inducidas generan las fuerzas electromotrices necesarias para el funcionamiento de un motor de inducción. Por el contrario, reducen la eficiencia de un transformador eléctrico porque disipan energía por efecto Joule; cf. [28].

Consecuentemente, en la práctica interesa modelar la distribución de las corrientes inducidas y simular numéricamente su comportamiento. Esto involucra el análisis del sistema de ecuaciones de Maxwell, que en su forma completa presenta una gran complejidad.

En muchas situaciones, el sistema de ecuaciones de Maxwell se aproxima

con modelos simplificados cuya resolución numérica es menos costosa. En particular, cuando se estudian máquinas eléctricas que trabajan a bajas frecuencias, un razonamiento asintótico permite despreciar las *corrientes de desplazamiento* y deducir así el denominado modelo de *eddy currents*; véanse [1, 6, 14]. De hecho, este modelo es muy frecuente en ingeniería eléctrica y por ello está suscitando un gran interés en el ámbito del análisis matemático y numérico; cf. [2, 3, 4, 6, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 32, 33, 39, 41].

En general, la resolución numérica del problema de *eddy currents* no puede hacerse con técnicas estándar del tipo del método de elementos finitos (FEM) o del método de elementos de contorno (BEM). En efecto, por un lado, no puede aplicarse directamente un método BEM porque en general las ecuaciones no son homogéneas y sus coeficientes no son constantes. Por otro lado, tampoco puede utilizarse directamente un método FEM, puesto que el campo electromagnético no se reduce únicamente a una región acotada sino que se extiende a todo el espacio. En este sentido, una estrategia habitual consiste en la introducción de un dominio computacional acotado que sea suficientemente grande. Sin embargo, a menudo esta técnica no resulta útil ya que involucra un dominio computacional tan grande que el coste del método numérico resulta excesivo. Incluso cuando no es así, el problema debe completarse con condiciones de contorno sobre la frontera del dominio computacional y la elección adecuada de estas condiciones puede resultar complicada; cf. [9].

Es importante señalar que, en las ecuaciones del problema de *eddy currents*, las no homogeneidades y las no linealidades se localizan en una zona acotada, fuera de la cual los coeficientes son constantes. Es precisamente esta propiedad la que permite combinar BEM y FEM para resolverlo numéricamente.

De hecho, el primer paso en un método BEM–FEM es descomponer el dominio (no acotado) del problema original en dos regiones:

- un dominio acotado que recoge las no homogeneidades y las no linealidades de las ecuaciones;
- la correspondiente región exterior no acotada, donde las ecuaciones son homogéneas y lineales, con coeficientes constantes.

Entonces el problema es equivalente a un *problema de transmisión* entre ambas regiones y con condiciones de transmisión sobre la frontera común, frontera que se dice *de acoplamiento*. A continuación se reformula el problema utilizando una *representación integral* de la solución en la zona exterior. Así se deduce un problema planteado en el dominio acotado y con condiciones de contorno *globales* (i.e. no diferenciales) sobre la frontera de acoplamiento. Llegados a este punto, el problema puede resolverse numéricamente aproximando las funciones definidas en el dominio acotado y las asociadas a la frontera de acoplamiento utilizando elementos finitos y elementos de contorno, respectivamente. Con esta estrategia, se obtienen aproximaciones de la solución en la región acotada y de las variables auxiliares definidas sobre la frontera. Además, utilizando estas aproximaciones junto con dicha fórmula de representación integral, también podemos estimar la solución en la región no acotada. Para ver diversas aplicaciones de este método, pueden consultarse [13, 25, 32, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 42, 43, 49, 50, 51, 52].

Tal y como hemos señalado, las condiciones de contorno sobre la frontera de acoplamiento se obtienen a partir de una fórmula de representación integral en la región exterior. Como estas condiciones no son únicas, distintas elecciones particulares dan lugar a diversos tipos de métodos BEM–FEM, siendo los más habituales el *método de Johnson y Nédélec* y el *método simétrico*. En el primero se impone una única ecuación sobre la frontera, que se obtiene a partir de la fórmula de representación y de la relación de salto del potencial de doble capa. En este caso, para analizar el error suele necesitarse que el operador asociado al potencial de doble capa sea compacto y, en consecuencia, que la frontera de acoplamiento sea regular; cf. [34, 36, 37]. En el método simétrico se añade una segunda ecuación sobre la frontera de acoplamiento, que se deduce de la fórmula de representación utilizando las relaciones de salto de la derivada normal del potencial de simple capa. Entonces, para analizar el error habitualmente basta que la frontera de acoplamiento sea Lipschitz continua; cf. [25].

La estrategia BEM–FEM se ha utilizado para el problema de *eddy currents* bajo régimen armónico en [13, 32, 41], entre otros.

En [32] se propone y se analiza un método BEM–FEM que utiliza como

frontera de acoplamiento la propia del conductor y opta por una formulación simétrica en términos del campo eléctrico.

En [14] se propone un esquema BEM–FEM no simétrico y formulado en términos del campo magnético. Ahora bien, dicho esquema no está escrito en la forma estándar del método *de Johnson y Nédélec* porque elimina la derivada normal de la variable asociada a la frontera utilizando el operador de Steklov–Poincaré. Este esquema se ha implementado en un código denominado TRIFOU (cf. [10]), aunque no conocemos ningún análisis de convergencia de este esquema. En todo caso, tal y como señalamos anteriormente, el análisis de los métodos BEM–FEM no simétricos suele requerir que la frontera de acoplamiento sea regular. En la práctica, esta propiedad resulta excesivamente restrictiva sobre la geometría del conductor y, por ejemplo, no permite estudiar dominios poliédricos.

Teniendo en cuenta estas dificultades, en [41] optamos por una formulación BEM–FEM simétrica en términos del campo magnético. En esta memoria seguimos dicho artículo para deducir y estudiar esta formulación BEM–FEM. También proponemos y analizamos una formulación alternativa para el tratamiento de conductores con topologías complicadas y la generalizamos al problema de *eddy currents* en régimen de evolución en tiempo. Damos algunos resultados numéricos obtenidos con ambos esquemas para el problema en régimen armónico.

Más concretamente, en el Capítulo 1 detallamos las ecuaciones de Maxwell y el modelo de *eddy currents*, tanto en régimen de evolución como en el caso armónico en tiempo.

El objetivo del Capítulo 2 es introducir las herramientas matemáticas necesarias para estudiar el problema de *eddy currents*. Precisamente, señalamos algunas propiedades fundamentales de espacios de funciones de trazas tangenciales y de operadores diferenciales sobre superficies Lipschitz continuas; cf. [20].

En el Capítulo 3 estudiamos el problema en *régimen armónico* en tiempo para un *conductor simplemente conexo*; cf. [41].

Para obtener una formulación variacional BEM–FEM de este problema, seguimos la estrategia introducida por Bossavit en [14]. De este modo, dividimos el espacio \mathbb{R}^3 en dos regiones: Un dominio acotado (que representa el conduc-

tor) y su exterior no acotado. A continuación, introducimos un potencial escalar magnético en la región no acotada. Este potencial es armónico y, en consecuencia, nos proporciona condiciones de contorno no locales para el problema en el dominio acotado. Entonces, en el dominio acotado podemos aproximar el campo magnético utilizando elementos finitos de Nédélec.

Como señalamos anteriormente, optamos por una formulación BEM–FEM de tipo simétrico motivados por el estudio de conductores con fronteras no regulares. De hecho, los resultados dados recientemente en [20] nos permiten probar que el método numérico que proponemos converge con orden óptimo siempre y cuando la frontera del conductor sea Lipschitz continua. En consecuencia, podemos tomar como frontera de acoplamiento directamente la propia del conductor, reduciendo el tamaño del dominio computacional y, por tanto, el coste del método.

También detallamos cómo implementar este método en el ordenador. En efecto, lo reescribimos como un sistema lineal y proponemos fórmulas de cuadratura para aproximar las integrales singulares involucradas en el ensamblaje de la matriz del sistema. Implementamos este método en un código MATLAB y lo utilizamos para estudiar un problema con solución exacta conocida explícitamente. Comparando la solución exacta con los resultados numéricos obtenidos, validamos el código que hemos desarrollado y al mismo tiempo comprobamos las propiedades de convergencia del esquema numérico.

En el Capítulo 4, estudiamos el problema de *eddy currents* en régimen armónico para *conductores no simplemente conexos*. En esta situación, los métodos numéricos propuestos en [32, 41] necesitan introducir superficies de corte, que pueden resultar excesivamente complicadas y costosas de calcular en la práctica; al respecto, véase también [8].

En [5] se muestra que la formulación en términos del campo magnético (para el problema en régimen armónico y planteado en un dominio acotado) admite una estructura de punto de silla que no requiere la construcción de superficies de corte; véase [31] para una estrategia similar. Básicamente, dicha estructura se obtiene introduciendo un multiplicador de Lagrange asociado al rotacional del campo

magnético en el dieléctrico que rodea al conductor.

Seguimos esta estrategia para el problema planteado en todo el espacio. Concretamente, tomamos un dominio computacional que contiene la región conductora e introducimos un multiplicador de Lagrange para imponer la restricción asociada al rotacional del campo magnético en el dieléctrico. A continuación, introducimos un potencial escalar magnético en el exterior del dominio computacional. Nuevamente, este potencial es armónico y nos proporciona condiciones de contorno no locales para el problema en el dominio computacional. De esta forma, deducimos una formulación BEM–FEM mixta que está bien planteada. A partir de esta formulación, deducimos un esquema de Galerkin utilizando elementos finitos de Nédélec y elementos finitos de Raviart–Thomas. Probamos que el correspondiente esquema discreto está bien planteado y analizamos su orden de convergencia. Además, detallamos su implementación y la desarrollamos en un código MATLAB. Testeamos este código utilizando un problema con solución exacta conocida explícitamente; así validamos el código y comprobamos las propiedades de convergencia del método numérico.

Es importante señalar que, incluso cuando la fuente de corriente es de tipo sinusoidal, hay situaciones en las que el campo electromagnético no presenta un comportamiento armónico en tiempo. Por esta razón, en el Capítulo 5 extendemos nuestro método numérico para el problema de *eddy currents* de *evolución en tiempo*, sin restricciones topológicas sobre el conductor. Bajo hipótesis de regularidad sobre los datos del problema, utilizamos el Teorema de J.L. Lions sobre la existencia y unicidad de soluciones de problemas lineales parabólicos para mostrar que la formulación BEM–FEM que proponemos está bien planteada. Deducimos un esquema semidiscreto en espacio utilizando elementos finitos de Nédélec y elementos finitos de Raviart–Thomas. A continuación, probamos que este esquema semidiscreto está bien planteado y analizamos su orden de convergencia. Finalizamos el estudio de este esquema reescribiéndolo en forma matricial.

Índice general

Agradecimientos	VII
Introducción	IX
1. Modelo de <i>eddy currents</i>	1
1.1. Modelo de <i>eddy currents</i>	3
1.2. Modelo de <i>eddy currents</i> en régimen armónico	5
2. Herramientas matemáticas	7
2.1. Espacios de Sobolev clásicos	8
2.1.1. Índice entero no negativo	9
2.1.2. Índice real no negativo	9
2.1.3. Índice real negativo	10
2.2. Espacios de Sobolev sobre superficies y teoría de trazas	10
2.2.1. Espacios de Sobolev sobre superficies	11
2.2.2. Trazas en espacios de Sobolev	12
2.3. Espacios $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ y $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$	14
2.4. Operadores diferenciales sobre superficies	17
2.5. Trazas tangenciales en $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$	18
2.6. Inversa del operador rotacional de superficie en dominios simplemente conexos	20
2.7. Potenciales armónicos en regiones no acotadas	25

2.7.1.	Operadores integrales sobre superficies	27
2.8.	Espacios básicos para problemas de evolución	34
3.	<i>Eddy currents</i> en conductores simplemente conexos	37
3.1.	Formulación variacional	37
3.1.1.	Un potencial escalar magnético	39
3.1.2.	Una formulación variacional BEM–FEM	40
3.2.	Esquema discreto	43
3.2.1.	Elementos finitos de Nédélec de primer orden	44
3.2.2.	Descripción y análisis del problema discreto	47
3.2.3.	Análisis de la convergencia	49
3.3.	Forma matricial del esquema discreto	50
3.3.1.	Base explícita de $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c)$	50
3.3.2.	Sistema de ecuaciones asociado al problema discreto	53
3.3.3.	Implementación del esquema discreto	54
3.4.	Resultados numéricos	54
3.4.1.	Descripción del problema test	55
3.4.2.	Resultados numéricos	55
4.	<i>Eddy currents</i> en conductores no simplemente conexos	59
4.1.	Espacios funcionales auxiliares	60
4.2.	Formulación variacional	66
4.2.1.	Una formulación variacional global	66
4.2.2.	Una formulación variacional mixta	68
4.2.3.	Una formulación variacional BEM–FEM	70
4.3.	Esquema discreto	76
4.3.1.	Descripción del problema discreto	76
4.3.2.	Análisis del esquema discreto	78
4.3.3.	Análisis de la convergencia	82
4.4.	Forma matricial del esquema discreto	88
4.4.1.	Implementación del esquema discreto	90
4.5.	Resultados numéricos	90

5. <i>Eddy currents</i> de evolución	95
5.1. Formulación variacional	96
5.1.1. Una formulación variacional global	96
5.1.2. Una formulación variacional mixta	100
5.1.3. Una formulación variacional BEM–FEM	103
5.2. Esquema semidiscreto	108
5.2.1. Descripción y análisis del problema semidiscreto	108
5.2.2. Análisis de la convergencia	110
5.3. Forma matricial del esquema semidiscreto	117
A. Integración numérica	119
Bibliografía	129

Capítulo 1

Modelo de *eddy currents*

El comportamiento de un *campo electromagnético* está regido por las *ecuaciones de Maxwell*, que escribimos a continuación en forma diferencial:

$$\left\{ \begin{array}{l} -\partial_t \mathbf{D} + \mathbf{rot} \mathbf{H} = \tilde{\mathbf{J}}, \\ \partial_t \mathbf{B} + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0}, \\ \mathbf{div} \mathbf{D} = \rho, \\ \mathbf{div} \mathbf{B} = 0. \end{array} \right. \quad (1.0.1)$$

La notación utilizada es la estándar:

- \mathbf{D} es la *inducción eléctrica*,
- \mathbf{E} es el *campo eléctrico*,
- \mathbf{B} es la *inducción magnética*,
- \mathbf{H} es el *campo magnético*,
- $\tilde{\mathbf{J}}$ es la *densidad de corriente*,
- ρ es la *densidad de carga*.

Estas funciones son reales y dependen del tiempo $t > 0$ y la posición $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

La primera ecuación de (1.0.1) es la *ley de Ampère–Maxwell* y coincide con la *ley de Ampère* salvo en el término adicional $\partial_t \mathbf{D}$ introducido por Maxwell. Esta ley, reescrita en forma integral, describe cómo rodean las líneas del campo magnético a una superficie que tiene un flujo eléctrico variable.

La segunda ecuación de (1.0.1) se denomina *ecuación de Faraday* y describe cómo rodean las líneas del campo eléctrico a una superficie por la que pasa un flujo magnético variable.

La tercera ecuación de (1.0.1) se conoce como *ley de Gauss* y físicamente significa que el flujo de la inducción eléctrica a través de una superficie cerrada es igual a la carga neta encerrada dentro de dicha superficie. En otras palabras, las líneas del campo eléctrico empiezan y terminan en cargas eléctricas.

Análogamente, la cuarta ecuación de (1.0.1) o *ley de Gauss del magnetismo* afirma que el flujo de la inducción magnética a través de cualquier superficie cerrada es nulo. En términos de las líneas del campo magnético, quiere decir que dichas líneas no convergen ni divergen en ningún punto del espacio; es decir, no existen polos magnéticos aislados.

Completamos el sistema (1.0.1) añadiendo las *ecuaciones constitutivas*

$$\begin{aligned}\mathbf{D} &= \varepsilon \mathbf{E}, \\ \mathbf{B} &= \mu \mathbf{H},\end{aligned}\tag{1.0.2}$$

y la *ley de Ohm generalizada*

$$\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E},\tag{1.0.3}$$

donde \mathbf{J} representa la *densidad de la fuente de corriente*. Según estas ecuaciones, el campo electromagnético interacciona con la materia a través de los siguientes parámetros:

- la *permitividad eléctrica*, ε ,
- la *permeabilidad magnética*, μ ,

- la *conductividad eléctrica*, σ .

En efecto, las ecuaciones constitutivas (1.0.2) describen propiedades intrínsecas de la materia. Además, la ley (1.0.3) afirma que la densidad de corriente total, $\tilde{\mathbf{J}}$, consiste en la densidad de la fuente de corriente, \mathbf{J} , más un término proporcional al campo eléctrico \mathbf{E} .

1.1. Modelo de *eddy currents*

El sistema de ecuaciones (1.0.1–1.0.3) describe un amplio rango de fenómenos físicos. Restringiéndonos a situaciones particulares, podemos hacer hipótesis que simplifican las ecuaciones y deducir así modelos que son más sencillos de resolver numéricamente. Entre ellos, uno de los más utilizados es el *modelo de eddy currents*, que surge de las ecuaciones de Maxwell al despreciar las *corrientes de desplazamiento*, $\partial_t \mathbf{D}$, y que es el centro de estudio de este trabajo.

Más concretamente, estudiamos un conductor que ocupa un dominio acotado $\Omega_c \subset \mathbb{R}^3$ con frontera $\Sigma := \partial\Omega_c$ Lipschitz continua. Suponemos que está rodeado por un medio dieléctrico, por ejemplo aire seco, y denotamos $\Omega_c^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}_c$.

Entonces buscamos el campo electromagnético (\mathbf{E}, \mathbf{H}) que cumpla

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E} & \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\mu \mathbf{H}) + \mathbf{rot} \mathbf{E} = \mathbf{0} & \text{en } (0, T) \times \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}) = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_c^e, \\ \int_{\Sigma_j} \varepsilon \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \text{en } (0, T), \forall j = 1, \dots, N_\Sigma, \end{array} \right. \quad (1.1.1)$$

donde Σ_j ($j = 1, \dots, N_\Sigma$) representan las componentes conexas de Σ . Además, \mathbf{n} denota un vector unitario que es normal a Σ en casi todo punto y está orientado hacia el interior de Ω_c^e .

El campo electromagnético también debe satisfacer las condiciones iniciales

$$\mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{H}_0(\mathbf{x}) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(0, \mathbf{x}) = \mathbf{E}_0(\mathbf{x}) \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \quad (1.1.2)$$

así como las condiciones asintóticas

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.1.3)$$

uniformemente en casi todas las direcciones $(t, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|})$, con $t \in (0, T)$ y $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Nota 1.1.1 En [14] se justifica el problema (1.1.1) como caso límite de la familia uniparamétrica de problemas

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\alpha \partial_t(\varepsilon \mathbf{E}_\alpha) + \mathbf{rot} \mathbf{H}_\alpha = \mathbf{J} + \sigma \mathbf{E}_\alpha & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \partial_t(\mu \mathbf{H}_\alpha) + \mathbf{rot} \mathbf{E}_\alpha = \mathbf{0} & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{E}_\alpha) = 0 & \text{en } (0, T) \times \Omega_c^e, \\ \int_{\Sigma_j} \varepsilon \mathbf{E}_\alpha \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \text{en } (0, T), \quad \forall j = 1, \dots, N_\Sigma \end{array} \right.$$

En efecto, el problema físico (1.0.1–1.0.3) se corresponde con $\alpha = 1$ y el problema (1.1.1) se obtiene con un razonamiento asintótico para $\alpha \rightarrow 0$.

En lo que sigue consideramos únicamente *materiales sin memoria* que sean *lineales e isotropos*. Además, suponemos que los parámetros ε y μ dependen únicamente de la variable espacial $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Entonces ε , μ y σ son funciones escalares, reales y acotadas que cumplen las siguientes propiedades:

- la permitividad eléctrica es tal que

$$\begin{aligned} 0 < \varepsilon_0 \leq \varepsilon(\mathbf{x}) \leq \varepsilon_1 & \quad \text{en c.t.p. } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ \varepsilon(\mathbf{x}) = \varepsilon_0 & \quad \text{en c.t.p. } \mathbf{x} \in \Omega_c^e; \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

- la permeabilidad magnética satisface

$$\begin{aligned} 0 < \mu_0 \leq \mu(\mathbf{x}) \leq \mu_1 & \quad \text{en c.t.p. } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ \mu(\mathbf{x}) = \mu_0 & \quad \text{en c.t.p. } \mathbf{x} \in \Omega_c^e; \end{aligned} \quad (1.1.5)$$

- la conductividad eléctrica cumple

$$\begin{aligned} 0 < \sigma_0 \leq \sigma(t, \mathbf{x}) \leq \sigma_1 & \quad \text{en c.t.p. } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega_c, \\ \sigma(t, \mathbf{x}) = 0 & \quad \text{en c.t.p. } (t, \mathbf{x}) \in (0, T) \times \Omega_c^e; \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

para algunas constantes $\varepsilon_0, \varepsilon_1, \mu_0, \mu_1, \sigma_0, \sigma_1 \in \mathbb{R}$.

Bajo estas hipótesis, deducimos de la primera ecuación de (1.1.1) que la función \mathbf{J} debe cumplir las siguientes condiciones de compatibilidad:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{J} &= 0 && \text{en } (0, T) \times \Omega_c^e, \\ \int_{\Sigma_j} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS &= 0 && \text{en } (0, T), \quad \forall j = 1, \dots, N_\Sigma. \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

1.2. Modelo de *eddy currents* en régimen armónico

A diferencia de lo que sucede para el problema de evolución, la modelización del problema en régimen armónico emplea funciones complejas. Por esta razón, introducimos la unidad imaginaria $\iota := \sqrt{-1}$. Además, dado un número complejo $\alpha \in \mathbb{C}$, representamos sus partes real e imaginaria por $\operatorname{Re}[\alpha]$ y $\operatorname{Im}[\alpha]$, respectivamente, mientras que denotamos su conjugado por $\bar{\alpha}$ y su módulo por $|\alpha|$.

Consideramos una bobina por la que circula una corriente alterna a baja frecuencia y que induce un campo electromagnético en un conductor pasivo; véase la Figura 1.1 a continuación.

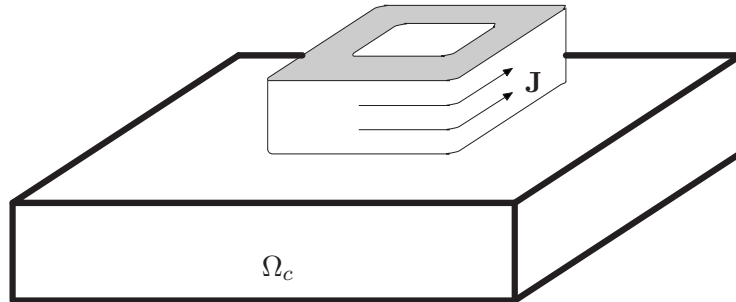


Figura 1.1: Geometría del problema

En esta situación, la densidad de la corriente alterna presenta la forma

$$\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{Re}[e^{i\omega t} \mathbf{j}(\mathbf{x})],$$

donde ω denota la *frecuencia angular*. Además, \mathbf{j} es un campo complejo que depende únicamente de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ y se denomina *amplitud compleja* de la densidad de corriente.

Supongamos que la conductividad σ depende únicamente de $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$. Entonces los campos eléctrico y magnético también son armónicos en tiempo:

$$\mathbf{E}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{Re}[e^{i\omega t} \mathbf{e}(\mathbf{x})] \quad \text{y} \quad \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{Re}[e^{i\omega t} \mathbf{h}(\mathbf{x})].$$

Por lo tanto, el problema (1.1.1) es equivalente a determinar las amplitudes complejas \mathbf{e} y \mathbf{h} tales que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \mathbf{rot} \mathbf{h} = \mathbf{j} + \sigma \mathbf{e} & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ i\omega\mu \mathbf{h} + \mathbf{rot} \mathbf{e} = \mathbf{0} & \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div}(\varepsilon \mathbf{e}) = 0 & \text{en } \Omega_c^e, \\ \int_{\Sigma_j} \varepsilon \mathbf{e} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \forall j = 1, \dots, N_\Sigma. \end{array} \right. \quad (1.2.1)$$

También deben satisfacer las condiciones asintóticas (1.1.3), que ahora se traducen en

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \quad (1.2.2)$$

uniformemente en casi todas las direcciones $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Además, podemos reescribir las condiciones de compatibilidad (1.1.7) como

$$\left\{ \begin{array}{ll} \operatorname{div} \mathbf{j} = 0 & \text{en } \Omega_c^e, \\ \int_{\Sigma_j} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \, dS = 0 & \forall j = 1, \dots, N_\Sigma. \end{array} \right. \quad (1.2.3)$$

Para cerrar este capítulo, señalamos que el problema (1.2.1–1.2.2) es útil en la práctica para diseñar y estudiar máquinas que trabajan a baja frecuencia. Efectivamente, en [6, Teorema 8.1] se prueba que el problema (1.2.1–1.2.2) aproxima al problema físico (1.0.1–1.0.3) con orden 2 respecto a la frecuencia ω .

Capítulo 2

Herramientas matemáticas

A lo largo de esta memoria, las letras en negrita representan vectores o funciones vectoriales en \mathbb{C}^3 . Denotamos la norma euclídea por $|\cdot|$ y los productos escalar euclídeo y vectorial por \cdot y \wedge , respectivamente. Usamos repetidamente las siguientes identidades vectoriales:

$$\begin{aligned} (a) \quad & \mathbf{a} \wedge (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \\ (b) \quad & \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \wedge \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \wedge \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}), \\ (c) \quad & \mathbf{rot} \mathbf{rot} \mathbf{u} = \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) - \Delta \mathbf{u}, \\ (d) \quad & \operatorname{div}(\mathbf{v} \wedge \mathbf{u}) = \mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \mathbf{v} - \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \end{aligned} \tag{2.0.1}$$

para cualesquiera vectores $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{C}^3$ y funciones vectoriales \mathbf{u}, \mathbf{v} suficientemente regulares.

Utilizamos el superíndice \top para designar la transpuesta de una matriz e introducimos una norma matricial $\|\cdot\|$ que esté inducida por una norma vectorial.

Además, C (con o sin subíndices) es una constante genérica, no necesariamente la misma en diferentes estimaciones.

2.1. Espacios de Sobolev clásicos

Sea \mathcal{O} un dominio abierto y acotado de \mathbb{R}^n ($n = 2$ ó 3). Suponemos que su frontera $\partial\mathcal{O}$ es *Lipschitz continua*, concepto que detallamos a continuación; véase [45, Definición 3.1].

Definición 2.1.1. *Decimos que $\partial\mathcal{O}$ es Lipschitz continua si para cada $\mathbf{x} \in \partial\mathcal{O}$ podemos tomar un sistema de coordenadas ortogonal*

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_{n-1}, y_n) \equiv (\mathbf{y}', y_n),$$

para el que existen

- un vector $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ con $\mathbf{x} \in \mathcal{U} := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n; |y_j| < a_j \ \forall j = 1, \dots, n\}$,
- una función $f : \mathcal{U}' \rightarrow \mathbb{R}$ Lipschitz continua con $|f(\mathbf{y}')| < \frac{a_n}{2}$ para cualquier $\mathbf{y}' \in \mathcal{U}' := \{\mathbf{y}' \in \mathbb{R}^{n-1}; |y'_j| < a_j \ \forall j = 1, \dots, n-1\}$,

cumpliendo que

$$\mathcal{O} \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{U}; y_n < f(\mathbf{y}')\} \quad \text{y} \quad \partial\mathcal{O} \cap \mathcal{U} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{U}; y_n = f(\mathbf{y}')\}.$$

Denotamos por $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ y $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ los espacios de las funciones indefinidamente diferenciables que tienen soporte compacto contenido en \mathcal{O} ó en \mathbb{R}^n , respectivamente. Entonces definimos

$$\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) := \{f|_{\mathcal{O}}; f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)\} \quad \text{y} \quad \mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}) := (\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}}))^3.$$

Para cada $p \in [1, \infty)$, consideramos el espacio $L^p(\mathcal{O})$ de funciones $f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{C}$ que son medibles en el sentido de Lebesgue y con

$$\|f\|_{p, \mathcal{O}}^p := \int_{\Omega} |f(\mathbf{x})|^p d\mathbf{x} < +\infty.$$

Dado un multiíndice $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)^\top \in \mathbb{N}^n$, escribimos

$$\partial^{\boldsymbol{\alpha}} := \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \quad \text{y} \quad |\boldsymbol{\alpha}| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n.$$

A continuación introducimos los *espacios de Sobolev* clásicos en el dominio \mathcal{O} : En primer lugar, definimos los espacios de Sobolev de índice entero no negativo. Después los generalizamos a índices reales no negativos y, finalmente, a índices reales negativos.

2.1.1. Índice entero no negativo

Sea $m \in \mathbb{N}$ un entero no negativo. Introducimos el espacio de Sobolev

$$H^m(\mathcal{O}) := \{f \in L^2(\mathcal{O}); \partial^\alpha f \in L^2(\mathcal{O}) \forall \alpha \in \mathbb{N}^n \text{ con } |\alpha| \leq m\},$$

que es la completación de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ con respecto a la norma

$$\|f\|_{m,\mathcal{O}} := \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\mathcal{O}} |\partial^\alpha f(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}.$$

En particular, $H^0(\mathcal{O}) \equiv L^2(\mathcal{O})$ y utilizamos la siguiente notación estándar para su producto interior:

$$(f, g)_{0,\mathcal{O}} := \int_{\mathcal{O}} f(\mathbf{x}) \overline{g(\mathbf{x})} d\mathbf{x}.$$

2.1.2. Índice real no negativo

Existen varias definiciones equivalentes de los espacios de Sobolev de índice real no negativo. Aquí los introducimos con el *método de interpolación real*; cf. [29, Párrafo 1.1]. Más concretamente, representamos cada número $s \in [0, +\infty)$ no entero bajo la forma $s = m + \hat{s}$, con $m \in \mathbb{N}$ y $\hat{s} \in (0, 1)$. Entonces definimos el espacio de Sobolev $H^s(\mathcal{O})$ como la completación de $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{O}})$ con respecto a la norma

$$\|f\|_{s,\mathcal{O}} := \left(\|f\|_{m,\mathcal{O}}^2 + \sum_{|\alpha|=m} |\partial^\alpha f|_{\hat{s},\mathcal{O}}^2 \right)^{1/2},$$

donde

$$|g|_{\hat{s},\mathcal{O}}^2 := \int_{\mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{n+2\hat{s}}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}.$$

2.1.3. Índice real negativo

Introducimos los espacios de Sobolev de índice negativo por dualidad. En efecto, fijado un número real s no negativo, denotamos por $H_0^s(\mathcal{O})$ la clausura de $\mathcal{D}(\mathcal{O})$ en $H^s(\mathcal{O})$. Entonces $H_0^s(\mathcal{O})$ es denso en $L^2(\mathcal{O})$ y podemos definir $H^{-s}(\mathcal{O})$ como el espacio dual de $H_0^s(\mathcal{O})$ con respecto al espacio pivote $L^2(\mathcal{O})$. Representamos su producto de dualidad como sigue:

$$\begin{aligned} H^{-s}(\mathcal{O}) \times H_0^s(\mathcal{O}) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (f, g) &\mapsto \langle f, \bar{g} \rangle_{s, \mathcal{O}}; \end{aligned}$$

en particular, tenemos que

$$\langle f, g \rangle_{s, \mathcal{O}} = (f, g)_{0, \mathcal{O}} \quad \forall f \in L^2(\mathcal{O}), g \in H_0^s(\mathcal{O}).$$

Además, utilizamos la norma inducida en el espacio $H^{-s}(\mathcal{O})$:

$$\|f\|_{-s, \mathcal{O}} := \sup_{g \in H_0^s(\mathcal{O}), g \neq 0} \frac{|\langle f, g \rangle_{s, \mathcal{O}}|}{\|g\|_{s, \mathcal{O}}},$$

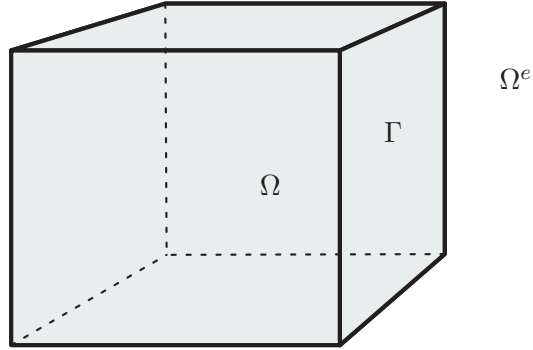
así que las siguientes inclusiones son continuas y densas:

$$H_0^s(\mathcal{O}) \hookrightarrow L^2(\mathcal{O}) \hookrightarrow H^{-s}(\mathcal{O}).$$

En lo sucesivo, denotamos con **negrita** los espacios vectoriales asociados a los espacios de Sobolev anteriores. De este modo, tomamos $\mathbf{L}^2(\mathcal{O}) := (L^2(\mathcal{O}))^n$; análogamente, $\mathbf{H}^s(\mathcal{O}) := (H^s(\mathcal{O}))^n$ y $\mathbf{H}_0^s(\mathcal{O}) := (H_0^s(\mathcal{O}))^n$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

2.2. Espacios de Sobolev sobre superficies y teoría de trazas

Consideramos un dominio acotado $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ cuya frontera $\Gamma := \partial\Omega$ sea Lipschitz continua. Sin pérdida de generalidad, suponemos que Ω , $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$ y Γ son conexos.

Figura 2.1: Dominio Ω

Denotamos por \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie Γ y orientado hacia el interior de Ω^e .

Sea $\{\Omega_j; j = 0, \dots, m\}$ un recubrimiento abierto de $\bar{\Omega}$ tal que

$$\Gamma \subseteq \bigcup_{j=1}^m \Omega_j \quad \text{y} \quad \Gamma \cap \Omega_0 = \emptyset.$$

Para cada $j = 1, \dots, m$, definimos la aplicación

$$\begin{aligned} \phi_j : \mathcal{U}'_j &\rightarrow \Gamma_j \\ \mathbf{y}' &\mapsto \phi_j(\mathbf{y}') := (\mathbf{y}', f_j(\mathbf{y}')), \end{aligned}$$

donde seguimos la notación de la Definición 2.1.1 y $\Gamma_j := \Gamma \cap \Omega_j$. Así construido, $\{(\Gamma_j, \phi_j); j = 1, \dots, m\}$ es un atlas de Γ .

2.2.1. Espacios de Sobolev sobre superficies

Para cada $s \in [0, 1]$, definimos el espacio de Sobolev

$$H^s(\Gamma) := \left\{ \lambda \in \mathcal{D}'(\Gamma); \lambda \circ \phi_j \in H^s(\mathcal{U}'_j \cap \phi_j^{-1}(\Gamma_j)) \forall j = 1, \dots, m \right\} \quad (2.2.1)$$

y lo dotamos de la norma

$$\|\lambda\|_{s,\Gamma} := \left(\sum_{j=1}^m \|\lambda \circ \phi_j\|_{s, \mathcal{U}'_j \cap \phi_j^{-1}(\Gamma_j)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.2.2)$$

Puede comprobarse que el espacio $H^s(\Gamma)$ es de Hilbert y que su definición es independiente de la elección del recubrimiento $\{\Omega_j; j = 0, \dots, m\}$.

Además, $H^s(\Gamma)$ es denso en $H^0(\Gamma) \equiv L^2(\Gamma)$. Esta propiedad nos permite introducir $H^{-s}(\Gamma)$ como el espacio dual de $H^s(\Gamma)$ con espacio pivote $L^2(\Gamma)$. Representamos su producto de dualidad como sigue:

$$\begin{aligned} H^{-s}(\Gamma) \times H^s(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\lambda, \eta) &\mapsto \langle \lambda, \bar{\eta} \rangle_{s,\Gamma}; \end{aligned}$$

en particular, tenemos que

$$\langle \lambda, \eta \rangle_{s,\Gamma} = (\lambda, \eta)_{0,\Gamma} \quad \forall \lambda \in L^2(\Gamma), \eta \in H^s(\Gamma).$$

Consideramos la norma inducida en $H^{-s}(\Gamma)$:

$$\|\lambda\|_{-s,\Gamma} := \sup_{\eta \in H^s(\Gamma), \eta \neq 0} \frac{|\langle \lambda, \eta \rangle_{s,\Gamma}|}{\|\eta\|_{s,\Gamma}},$$

de forma que las siguientes inclusiones son continuas y densas:

$$H^s(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma) \hookrightarrow H^{-s}(\Gamma). \quad (2.2.3)$$

Denotamos con **negrita** los espacios vectoriales asociados; es decir, tomamos $\mathbf{H}^s(\Gamma) := (H^s(\Gamma))^3$ para cualquier $s \in [-1, 1]$. También introducimos

$$\mathbf{L}_\tau^2(\Gamma) := \{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{L}^2(\Gamma); \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{n} = 0 \text{ sobre } \Gamma \},$$

que es un subespacio cerrado de $\mathbf{L}^2(\Gamma) := (L^2(\Gamma))^3$. Así definido, $\mathbf{L}_\tau^2(\Gamma)$ se identifica con el espacio de funciones de $\mathbf{L}^2(\Gamma)$ que pertenecen al fibrado tangente de Γ en casi todo punto; al respecto, véanse [20, Párrafos 1 y 2].

2.2.2. Trazas en espacios de Sobolev

El siguiente resultado es clásico y puede consultarse en [29, Teorema 1.5] ó en [35, Teorema 3.37].

Teorema 2.2.1. *Dado $s \in (0, 1/2]$, la aplicación que a cada función $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ le asocia su restricción $u|_{\Gamma}$ a Γ se extiende de forma única a un operador lineal continuo*

$$\gamma : H^{s+1/2}(\Omega) \rightarrow H^s(\Gamma).$$

Este operador se denomina traza y es suprayectivo. Además, admite una inversa a derecha que es continua y que denotamos por γ^{-1} .

Fijado $s \in (0, 1/2]$, introducimos la traza vectorial $\gamma : \mathbf{H}^{s+1/2}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}^s(\Gamma)$ actuando por componentes. También definimos el siguiente operador continuo, que se dice *traza tangencial*:

$$\begin{aligned} \gamma_{\tau} : \mathbf{H}^{s+1/2}(\Omega) &\rightarrow \mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma) \\ \mathbf{q} &\mapsto \gamma_{\tau} \mathbf{q} := \gamma \mathbf{q} \wedge \mathbf{n}. \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

Denotamos su imagen por $\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma) := \gamma_{\tau}(\mathbf{H}^{s+1/2}(\Omega))$, que es un espacio de Hilbert con la norma del grafo

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)} := \inf \left\{ \|\mathbf{q}\|_{s+1/2, \Omega}; \mathbf{q} \in \mathbf{H}^{s+1/2}(\Omega) \text{ con } \gamma_{\tau} \mathbf{q} = \boldsymbol{\lambda} \right\}.$$

El siguiente resultado se cumple por la propia definición del espacio $\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$.

Proposición 2.2.2. *Para todo $s \in (0, 1/2]$, el operador lineal*

$$\gamma_{\tau} : \mathbf{H}^{s+1/2}(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$$

es continuo y suprayectivo. Además, admite una inversa a derecha que es continua y que representamos por γ_{τ}^{-1} .

Para cada $s \in (0, 1/2]$, sabemos que $H^s(\Gamma)$ es denso en $L^2(\Gamma)$ (véase (2.2.3)), así que $\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$ es denso en $\mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$. En consecuencia, podemos introducir el espacio $\mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma)$ dual de $\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$ con respecto al espacio pivote $\mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$. También podemos extender la siguiente forma sesquilineal al espacio $\mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$:

$$\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\tau, \Gamma} := (\boldsymbol{\lambda} \wedge \mathbf{n}, \boldsymbol{\eta})_{0, \Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma).$$

Entonces

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma) \times \mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto \langle \boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\eta}} \rangle_{\tau, \Gamma} \end{aligned}$$

define un producto de dualidad entre $\mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma)$ y $\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)$. Dotamos al espacio $\mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma)$ de la norma inducida

$$\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma)} := \sup_{\boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma), \boldsymbol{\eta} \neq \mathbf{0}} \frac{|\langle \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta} \rangle_{\tau, \Gamma}|}{\|\boldsymbol{\eta}\|_{\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma)}}.$$

De esta forma, las siguientes inclusiones son continuas y densas:

$$\mathbf{H}_{\times}^s(\Gamma) \hookrightarrow \mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma) \hookrightarrow \mathbf{H}_{\times}^{-s}(\Gamma). \quad (2.2.5)$$

En lo sucesivo, denotamos por convenio $\mathbf{H}_{\times}^0(\Gamma) := \mathbf{L}_{\tau}^2(\Gamma)$. Además, simplificamos la notación escribiendo γ_{τ} para la composición $\gamma_{\tau} \circ \gamma^{-1}$.

2.3. Espacios $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ y $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$

Consideramos el espacio

$$\mathbf{H}(\text{div}, \Omega) := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \text{div } \mathbf{u} \in L^2(\Omega) \},$$

que es de Hilbert con la norma del grafo

$$\|\mathbf{u}\|_{\text{div}, \Omega} := \left(\|\mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 + \|\text{div } \mathbf{u}\|_{0, \Omega}^2 \right)^{1/2}.$$

Teorema 2.3.1. *El espacio $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$.*

Demostración. La prueba de este resultado puede consultarse en [29, Teorema 2.4] ó [45, Teorema 3.22]. ■

Aplicando el Teorema 2.3.1 junto con la fórmula de Green

$$(\mathbf{u}, \nabla v)_{0, \Omega} + (\text{div } \mathbf{u}, v)_{0, \Omega} = (\mathbf{u}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}, \gamma v)_{0, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\Omega), v \in H^1(\Omega),$$

deducimos las siguientes propiedades del operador de traza normal; para una exposición más detallada, véase [29, Teorema 2.5 y Corolario 2.6] ó bien [45, Teorema 3.24].

Proposición 2.3.2. *La aplicación que a cada función $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ le asocia su componente normal $\mathbf{u}|_{\Gamma} \cdot \mathbf{n}$ sobre Γ se extiende a un único operador lineal continuo*

$$\gamma_{\mathbf{n}} : \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma),$$

que es suprayectivo y se dice traza normal. Además, se cumple

$$(\mathbf{u}, \nabla v)_{0,\Omega} + (\operatorname{div} \mathbf{u}, v)_{0,\Omega} = \langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, \gamma v \rangle_{1/2,\Gamma}, \quad (2.3.1)$$

para cualesquiera funciones $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ y $v \in H^1(\Omega)$.

El siguiente resultado es consecuencia de la fórmula de Green (2.3.1).

Corolario 2.3.3. *Consideramos $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dos dominios (abiertos pero no necesariamente acotados) con fronteras $\Gamma_1 := \partial\Omega_1, \Gamma_2 := \partial\Omega_2$ Lipschitz continuas y denotamos por Ω el interior de $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ una función tal que $\mathbf{u}|_{\Omega_1} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_1)$ y $\mathbf{u}|_{\Omega_2} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_2)$. Entonces $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ si y sólo si*

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}|_{\Omega_1}) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{u}|_{\Omega_2}) \quad \text{sobre } \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

Definimos el espacio de funciones vectoriales

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega); \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega) \},$$

que es de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{rot},\Omega}$ inducida por el producto escalar

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathbf{rot},\Omega} := (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} + (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega}.$$

En general, para cada $s \geq 0$ definimos el espacio

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega_c); \mathbf{rot} \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\Omega_c) \},$$

que es de Hilbert con la norma del grafo

$$\|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c)} := (\|\mathbf{u}\|_{s,\Omega_c}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{u}\|_{s,\Omega_c}^2)^{1/2}.$$

El siguiente resultado es clásico y puede consultarse en [29, Teorema 2.10] ó en [45, Teorema 3.26].

Teorema 2.3.4. *El espacio $\mathcal{D}(\overline{\Omega})$ es denso en $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.*

Obsérvese que, según la cuarta identidad de (2.0.1) y la fórmula de Gauss,

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{rot} \overline{\mathbf{v}} - \mathbf{rot} \mathbf{u} \cdot \overline{\mathbf{v}}) d\mathbf{x} = \int_{\Gamma} (\overline{\mathbf{v}} \wedge \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS_{\mathbf{x}} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Aplicando las dos primeras identidades de (2.0.1), tenemos que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} - (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = ((\mathbf{u} \wedge \mathbf{n}) \wedge \mathbf{n}, \mathbf{v} \wedge \mathbf{n})_{0,\Gamma} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}).$$

Entonces, con un razonamiento por densidad deducimos que

$$(\mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} - (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = \langle \gamma_{\tau} \mathbf{u}, \gamma_{\tau} \mathbf{v} \rangle_{\tau, \Gamma} \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega). \quad (2.3.2)$$

Utilizando esta relación junto con el Teorema 2.3.4, podemos extender el operador de traza tangencial γ_{τ} a todo el espacio $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, tal y como señalamos a continuación; cf. [29, Teorema 2.11] ó [45, Teorema 3.29].

Teorema 2.3.5. *La traza tangencial definida por (2.2.4) se extiende de forma única a un operador lineal continuo*

$$\gamma_{\tau} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\Gamma).$$

Además, se cumple

$$(\mathbf{u}, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} - (\mathbf{rot} \mathbf{u}, \mathbf{v})_{0,\Omega} = \langle \gamma_{\tau} \mathbf{u}, \gamma_{\tau} \mathbf{v} \rangle_{\tau, \Gamma}, \quad (2.3.3)$$

para cualesquiera $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$.

El siguiente resultado es consecuencia de la fórmula de Green (2.3.3).

Corolario 2.3.6. *Consideramos $\Omega_1, \Omega_2 \subseteq \mathbb{R}^3$ dos dominios (abiertos pero no necesariamente acotados) con fronteras $\Gamma_1 := \partial\Omega_1, \Gamma_2 := \partial\Omega_2$ Lipschitz continuas y denotamos por Ω el interior de $\overline{\Omega_1 \cup \Omega_2}$. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ una función tal que $\mathbf{u}|_{\Omega_1} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_1)$ y $\mathbf{u}|_{\Omega_2} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_2)$. Entonces $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ si y sólo si*

$$\gamma_{\tau}(\mathbf{u}|_{\Omega_1}) = \gamma_{\tau}(\mathbf{u}|_{\Omega_2}) \quad \text{sobre } \Gamma_1 \cap \Gamma_2.$$

2.4. Operadores diferenciales sobre superficies

Introducimos el *rotacional vectorial de superficie* $\mathbf{rot}_\Gamma := \gamma_\tau \circ \nabla \circ \gamma^{-1}$, definición que queda justificada gracias al siguiente resultado auxiliar.

Lema 2.4.1. *Sea $u \in H^1(\Omega)$ tal que $\gamma u = 0$. Entonces $\gamma_\tau(\nabla u) = \mathbf{0}$.*

Demostración. Fijamos $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ arbitrario. Por un lado, la fórmula (2.3.3) para $\nabla u \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ garantiza que

$$(\nabla u, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} = \langle \gamma_\tau(\nabla u), \gamma_\tau \mathbf{v} \rangle_{\tau,\Gamma}.$$

Por otro lado, aplicando la fórmula (2.3.1) para las funciones $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ y $u \in H^1(\Omega)$ junto con la hipótesis $\gamma u = 0$,

$$(\nabla u, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} = -(u, \text{div}(\mathbf{rot} \mathbf{v}))_{0,\Omega} + \langle \gamma u, \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{v}) \rangle_{1/2,\Gamma} = 0.$$

En consecuencia,

$$\langle \gamma_\tau(\nabla u), \gamma_\tau \mathbf{v} \rangle_{\tau,\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega),$$

y concluimos que $\gamma_\tau(\nabla u) = \mathbf{0}$ en $\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$. ■

Proposición 2.4.2. *El operador lineal*

$$\mathbf{rot}_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$$

está bien definido y es continuo.

Demostración. Nótese en primer lugar que la definición de \mathbf{rot}_Γ es independiente de la elección del levantamiento γ^{-1} . En efecto, dados $u_1, u_2 \in H^1(\Omega)$ tales que $\gamma u_1 = \gamma u_2$, tenemos que $u_1 - u_2 \in H^1(\Omega)$ con $\gamma(u_1 - u_2) = 0$; luego, según el Lema 2.4.1,

$$\gamma_\tau(\nabla u_1) = \gamma_\tau(\nabla u_2).$$

En lo que respecta a la continuidad de \mathbf{rot}_Γ , basta observar que es composición de aplicaciones continuas (véanse el Teorema 2.2.1 y la Proposición 2.3.5). ■

El operador dual de \mathbf{rot}_Γ con respecto al producto de dualidad

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto \langle \boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\eta}} \rangle_{\tau, \Gamma} \end{aligned}$$

se conoce como *divergencia de superficie* y se denota por div_Γ :

$$\langle \varphi, \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \varphi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\tau, \Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma), \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (2.4.1)$$

Análogamente, el operador dual de \mathbf{rot}_Γ con respecto al producto de dualidad

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma) \times \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\eta}) &\mapsto \langle \boldsymbol{\lambda}, \bar{\boldsymbol{\eta}} \rangle_{1/2, \Gamma} \end{aligned}$$

se denomina *rotacional escalar de superficie* y se designa por rot_Γ :

$$\langle \varphi, \text{rot}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \varphi, \boldsymbol{\lambda} \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma), \varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \quad (2.4.2)$$

Observemos que la Proposición 2.4.2 justifica estas definiciones y garantiza que los operadores lineales

$$\text{div}_\Gamma : \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \text{rot}_\Gamma : \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$$

son continuos.

2.5. Trazas tangenciales en $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$

Dada una función $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$, decimos que $\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ si existe $\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que

$$\langle \gamma u, \varphi \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \gamma_\tau(\nabla u), \boldsymbol{\lambda} \rangle_{\tau, \Gamma} \quad \forall u \in H^2(\Omega),$$

en cuyo caso tomamos $\text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} := \varphi$. Consideramos el espacio

$$\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\text{div}_\Gamma, \Gamma) := \left\{ \boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma); \text{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} \in H^{-1/2}(\Gamma) \right\},$$

que es de Hilbert con la norma del grafo

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \boldsymbol{\lambda} &\mapsto \left(\|\boldsymbol{\lambda}\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda}\|_{-1/2, \Gamma}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Proposición 2.5.1. *Dada una función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, se cumple*

$$\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}_n(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \quad \text{en } H^{-1/2}(\Gamma).$$

Demostración. Sean $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ y $v \in H^2(\Omega)$ cualesquiera. Como $\nabla v \in \mathbf{H}^1(\Omega)$, podemos aplicar la fórmula de Green (2.3.3) junto con las definiciones de los operadores \mathbf{rot}_Γ y $\operatorname{div}_\Gamma$:

$$\langle \nabla v, \mathbf{rot} \mathbf{u} \rangle_{0, \Omega} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma(\nabla v), \boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{u} \rangle_{\tau, \Gamma} = \langle \nabla v, \operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{u}) \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Pero también podemos integrar por partes con la fórmula (2.3.1), de modo que

$$\langle \mathbf{rot} \mathbf{u}, \nabla v \rangle_{0, \Omega} = \langle \boldsymbol{\gamma}_n(\mathbf{rot} \mathbf{u}), \nabla v \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Utilizando las dos últimas identidades, tenemos

$$\langle \operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{u}), \nabla v \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \boldsymbol{\gamma}_n(\mathbf{rot} \mathbf{u}), \nabla v \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall v \in H^2(\Omega),$$

y deducimos que

$$\operatorname{div}_\Gamma(\boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{u}) = \boldsymbol{\gamma}_n(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma) \quad \forall \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{\Omega}). \quad (2.5.1)$$

Recordemos que las Proposiciones 2.3.2 y 2.3.5 garantizan que los operadores

$$\boldsymbol{\gamma}_n \circ \mathbf{rot} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\gamma}_\tau : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$$

son continuos. En consecuencia, el Teorema 2.3.4 nos permite concluir el resultado del enunciado haciendo un razonamiento por densidad en (2.5.1). ■

Teorema 2.5.2. *El operador lineal*

$$\boldsymbol{\gamma}_\tau : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$$

es continuo y suprayectivo. Además, admite una inversa a derecha que es continua y que denotamos por $\boldsymbol{\gamma}_\tau^{-1}$.

Demostración. Fijada $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ cualquiera, la Proposición 2.5.1 garantiza que $\operatorname{div}_\Gamma(\gamma_\tau \mathbf{u}) = \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{u}) \in H^{-1/2}(\Gamma)$. En virtud de la Proposición 2.3.2 sabemos que el operador $\gamma_n \circ \mathbf{rot} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\Gamma)$ es continuo, así que

$$\|\operatorname{div}_\Gamma(\gamma_\tau \mathbf{u})\|_{-1/2, \Gamma} = \|\gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{u})\|_{-1/2, \Gamma} \leq C \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}.$$

Utilizando esta propiedad junto con el Teorema 2.3.5, deducimos que el operador

$$\gamma_\tau : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$$

está bien definido y es continuo. Además, en [20, Teorema 4.1] se demuestra que este operador es suprayectivo. Entonces podemos aplicar el teorema del grafo cerrado y concluimos que el operador γ_τ admite una inversa a derecha

$$\gamma_\tau^{-1} : \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega),$$

que es continua. ■

2.6. Inversa del operador rotacional de superficie en dominios simplemente conexos

A lo largo de este párrafo, suponemos que el dominio Ω está acotado y es simplemente conexo. En esta situación, estudiamos cómo invertir el operador

$$\mathbf{rot}_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma).$$

Con este fin, caracterizamos su núcleo y su imagen como en [20, Corolario 5.3], y a continuación aplicamos el teorema del grafo cerrado.

En primer lugar, recordamos un teorema de representación que es clásico y puede consultarse en [29, Teorema 3.4 y Corolario 3.4]; ó bien en [45, Teoremas 3.37 y 3.38].

Teorema 2.6.1. *Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega)$ cumple*

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \text{ en } \Omega \quad \text{y} \quad \langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{u}, 1 \rangle_{1/2, \Gamma} = 0,$$

entonces existe un potencial vectorial $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\text{div } \mathbf{v} = 0$ y $\text{rot } \mathbf{v} = \mathbf{u}$. Análogamente, si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ satisface

$$\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega,$$

entonces existe un potencial escalar $v \in H^1(\Omega)$ tal que $\nabla v = \mathbf{u}$ y este potencial es único salvo una constante aditiva.

A continuación recordamos un resultado auxiliar sobre el operador divergencia. Para ello, definimos el espacio $L_0^2(\Omega) := \{f \in L^2(\Omega); (f, 1)_{0, \Omega} = 0\}$ de las funciones de cuadrado integrable y media nula. Obsérvese que el operador

$$\text{div} : \mathbf{H}_0^1(\Omega) \rightarrow L_0^2(\Omega)$$

es continuo y suprayectivo. Denotamos su núcleo por $\ker(\text{div})$ e introducimos

$$\ker(\text{div})^\perp := \{\mathbf{u} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega); (\mathbf{u}, \mathbf{v})_{0, \Omega} + (\nabla \mathbf{u}, \nabla \mathbf{v})_{0, \Omega} = 0 \forall \mathbf{v} \in \ker(\text{div})\},$$

que es el subespacio de $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ortogonal a $\ker(\text{div})$.

Lema 2.6.2. *El siguiente operador lineal define un isomorfismo:*

$$\text{div} : \ker(\text{div})^\perp \rightarrow L_0^2(\Omega).$$

Demostración. Puede consultarse en [29, Corolario 2.4]. ■

Teorema 2.6.3. *El núcleo del operador $\text{rot}_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)$ es*

$$\ker(\text{rot}_\Gamma) = \mathbb{C}.$$

Demostración. Para comodidad del lector, reproducimos a continuación la demostración dada en [20, Corolario 3.7].

Por un lado, la inclusión $\ker(\text{rot}_\Gamma) \supseteq \mathbb{C}$ es trivial.

Por otro lado, para estudiar la inclusión recíproca, consideramos una función $p \in H^1(\Omega)$ con $\mathbf{rot}_\Gamma(\gamma p) = \mathbf{0}$.

Sea $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ arbitraria. Aplicando la fórmula de Green (2.3.3) a las funciones $\nabla p \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ y $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$,

$$(\nabla p, \mathbf{rot} \mathbf{v})_{0,\Omega} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma(\gamma p), \gamma_\tau \mathbf{v} \rangle_{\tau,\Gamma} = 0.$$

Además, utilizando la fórmula de integración por partes (2.3.1) para las funciones $\mathbf{rot} \mathbf{v} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ y $p \in H^1(\Omega)$,

$$(\mathbf{rot} \mathbf{v}, \nabla p)_{0,\Omega} = \langle \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{v}), \gamma p \rangle_{1/2,\Gamma}.$$

Teniendo en cuenta estas dos propiedades, resulta que

$$\langle \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{v}), \gamma p \rangle_{1/2,\Gamma} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

En consecuencia, habríamos concluido el resultado si probásemos que

$$\{\gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{v}); \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)\} = H_0^{-1/2}(\Gamma),$$

donde $H_0^{-1/2}(\Gamma) := \{\eta \in H^{-1/2}(\Gamma); \langle \eta, 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = 0\}$. Mostraremos esta identidad por doble contenido:

La inclusión (\subseteq) es consecuencia directa de la fórmula de Green (2.3.1). En efecto, basta notar que

$$\langle \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{v}), 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = (\mathbf{rot} \mathbf{v}, \nabla 1)_{0,\Omega} + (\mathbf{div}(\mathbf{rot} \mathbf{v}), 1)_{0,\Omega} = 0 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega).$$

Para ver la inclusión (\supseteq), fijamos $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ arbitrario. Recordemos que, en virtud de la Proposición 2.3.2, existe algún $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{div}, \Omega)$ con $\gamma_n \mathbf{u} = \lambda$. Entonces, integrando por partes con la fórmula (2.3.1),

$$(\mathbf{div} \mathbf{u}, 1)_{0,\Omega} = \langle \gamma_n \mathbf{u}, 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = \langle \lambda, 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = 0.$$

Es decir, $\mathbf{div} \mathbf{u} \in L_0^2(\Omega)$ y, aplicando el Lema 2.6.2, existe algún $\mathbf{w} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ tal que $\mathbf{div} \mathbf{w} = \mathbf{div} \mathbf{u}$. Nótese que $\gamma_n \mathbf{w} = 0$, luego

$$\langle \gamma_n(\mathbf{u} - \mathbf{w}), 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = \langle \lambda, 1 \rangle_{1/2,\Gamma} = 0.$$

Como además $\mathbf{div}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = 0$, el Teorema 2.6.1 garantiza la existencia de algún $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ con $\mathbf{rot} \mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{w}$ y por lo tanto $\lambda = \gamma_n \mathbf{u} = \gamma_n(\mathbf{rot} \mathbf{v})$. ■

Lema 2.6.4. *Si $u \in H^1(\Omega)$, entonces*

$$\operatorname{div}_\Gamma \circ \mathbf{rot}_\Gamma(\gamma u) = 0. \quad (2.6.1)$$

Demostración. Sea $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$. Nótese que $\mathbf{rot}_\Gamma(\gamma u) \in \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ con

$$\langle \gamma v, \operatorname{div}_\Gamma \circ \mathbf{rot}_\Gamma(\gamma u) \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \gamma_\tau(\nabla v), \gamma_\tau(\nabla u) \rangle_{\tau, \Gamma} \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Integrando por partes con la fórmula de Green (2.3.3), deducimos que

$$\langle \gamma v, \operatorname{div}_\Gamma \circ \mathbf{rot}_\Gamma(\gamma u) \rangle_{1/2, \Gamma} = 0 \quad \forall v \in H^1(\Omega).$$

Puesto que $\gamma(H^1(\Omega)) = H^{1/2}(\Gamma)$ (véase el Teorema 2.2.1), la identidad anterior significa que (2.6.1) se cumple siempre que $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$.

Finalmente, recordemos que $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ es denso en $H^1(\Omega)$ y que el operador $\mathbf{rot}_\Gamma \circ \gamma : H^1(\Omega) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$ es continuo (véanse el Teorema 2.2.1 y la Proposición 2.4.2). Entonces podemos utilizar un razonamiento por densidad y concluir que (2.6.1) también se cumple para cada función $u \in H^1(\Omega)$. ■

El resultado que presentamos a continuación puede consultarse en [16, Proposición 2.1] para el caso de poliedros de Lipschitz y en [20, Corolario 5.3] para el caso más general de dominios de Lipschitz.

Teorema 2.6.5. *La imagen del operador \mathbf{rot}_Γ se caracteriza por*

$$\mathbf{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)) = \ker(\operatorname{div}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma).$$

Demostración. La siguiente demostración es análoga a la de [20, Teorema 5.1].

La inclusión $\mathbf{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)) \subseteq \ker(\operatorname{div}_\Gamma) \cap \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ es consecuencia directa del Lema 2.6.4.

Para ver la inclusión recíproca, fijamos $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Gamma, \Gamma)$ con $\operatorname{div}_\Gamma \boldsymbol{\lambda} = 0$. En virtud del Teorema 2.5.2, existe algún $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ con

$$\gamma_\tau \mathbf{u} = \boldsymbol{\lambda}. \quad (2.6.2)$$

Entonces, utilizando la Proposición 2.5.1, tenemos que

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = \operatorname{div}_{\Gamma}(\gamma_{\tau} \mathbf{u}) = \operatorname{div}_{\Gamma} \boldsymbol{\lambda} = 0.$$

Definimos la función

$$\mathbf{g} := \begin{cases} \mathbf{rot} \mathbf{u} & \text{en } \Omega, \\ \mathbf{0} & \text{en } \Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}. \end{cases}$$

Nótese que $\mathbf{g}|_{\Omega} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega)$ y $\mathbf{g}|_{\Omega^e} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega^e)$ con $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ en $\Omega \cup \Omega^e$; y además $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}|_{\Omega}) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}|_{\Omega^e}) = 0$ sobre Γ . Luego el Corolario 2.3.3 garantiza $\mathbf{g} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ con $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ en \mathbb{R}^3 .

Sea $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ un dominio abierto, acotado y simplemente conexo tal que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Como $\mathbf{g}|_{\mathcal{O}} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathcal{O})$ con $\operatorname{div}(\mathbf{g}|_{\mathcal{O}}) = 0$ en \mathcal{O} y $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}|_{\mathcal{O}}) = 0$ sobre $\partial\mathcal{O}$, el Teorema 2.6.1 implica que $\mathbf{g}|_{\mathcal{O}} = \mathbf{rot} \mathbf{v}$ para algún $\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\mathcal{O})$. En particular, tenemos que $\mathbf{rot} \mathbf{v}|_{\mathcal{O} \cap \Omega^e} = \mathbf{0}$ y, aplicando de nuevo el Teorema 2.6.1, existe algún $\varphi \in H^1(\mathcal{O} \cap \Omega^e)$ con $\nabla \varphi = \mathbf{v}|_{\mathcal{O} \cap \Omega^e}$. Nótese que

$$\mathbf{rot}_{\Gamma}(\gamma \varphi) = \gamma_{\tau}(\nabla \varphi) = \gamma_{\tau}(\mathbf{v}|_{\mathcal{O} \cap \Omega^e}) = \gamma_{\tau}(\mathbf{v}|_{\Omega}).$$

Definimos

$$\mathbf{w} := \mathbf{v}|_{\Omega} - \nabla \varphi \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega), \quad (2.6.3)$$

que cumple

$$\mathbf{rot} \mathbf{w} = \mathbf{rot} \mathbf{v}|_{\Omega} = \mathbf{g}|_{\Omega} = \mathbf{rot} \mathbf{u}.$$

Entonces $\mathbf{u} - \mathbf{w} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$ con $\mathbf{rot}(\mathbf{u} - \mathbf{w}) = \mathbf{0}$ y, utilizando de nuevo el Teorema 2.6.1, sabemos que existe algún $\psi \in H^1(\Omega)$ de forma que

$$\nabla \psi = \mathbf{u} - \mathbf{w}. \quad (2.6.4)$$

Ahora aplicamos sucesivamente las identidades (2.6.2), (2.6.4) y (2.6.3):

$$\boldsymbol{\lambda} = \gamma_{\tau} \mathbf{u} = \gamma_{\tau} \mathbf{w} + \gamma_{\tau}(\nabla \psi) = \gamma_{\tau}(\mathbf{v}|_{\Omega}) - \gamma_{\tau}(\nabla \varphi) + \gamma_{\tau}(\nabla \psi).$$

Por lo tanto, recordando la propiedad $\gamma_{\tau}(\mathbf{v}|_{\Omega}) = \mathbf{rot}_{\Gamma}(\gamma\varphi)$ junto con la definición del operador \mathbf{rot}_{Γ} , concluimos que

$$\boldsymbol{\lambda} = \mathbf{rot}_{\Gamma}(\gamma\psi).$$

■

El siguiente resultado es consecuencia de los dos teoremas anteriores y del teorema del grafo cerrado; cf. [41, Proposición 2.5].

Corolario 2.6.6. *El operador lineal*

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} : H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \rightarrow \ker(\operatorname{div}_{\Gamma}) \cap \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\operatorname{div}_{\Gamma}, \Gamma)$$

define un isomorfismo.

2.7. Potenciales armónicos en regiones no acotadas

A lo largo de este apartado, suponemos que el dominio Ω es acotado y simplemente conexo. Denotamos $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \bar{\Omega}$, e introducimos el espacio

$$W^1(\Omega^e) := \left\{ \varphi \in \mathcal{D}'(\Omega^e); \frac{\varphi}{\sqrt{1+|\mathbf{x}|^2}} \in \mathbf{L}^2(\Omega^e), \nabla\varphi \in \mathbf{L}^2(\Omega^e) \right\}.$$

En [46, Párrafo 2.5.4] se prueba que este espacio es de Hilbert con la norma

$$\begin{aligned} W^1(\Omega^e) &\rightarrow \mathbb{R} \\ \varphi &\mapsto \|\nabla\varphi\|_{0,\Omega^e}. \end{aligned}$$

En dicha referencia también se demuestra que

$$\{\varphi|_{\mathcal{O}}; \varphi \in W^1(\Omega^e)\} = H^1(\mathcal{O}),$$

para cada subdominio $\mathcal{O} \subset \Omega^e$ abierto y acotado; así que el siguiente resultado es consecuencia del Teorema 2.2.1.

Lema 2.7.1. *La aplicación que a cada función $u \in \mathcal{D}(\overline{\Omega^e})$ le asocia su restricción $u|_\Gamma$ a Γ se extiende de forma única a un operador lineal continuo*

$$\gamma : W^1(\Omega^e) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma).$$

Esta aplicación es suprayectiva y se dice traza.

Lema 2.7.2. *Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega^e) \cap \mathbf{H}(\text{rot}, \Omega^e)$ con*

$$\text{div } \mathbf{u} = 0 \quad \text{y} \quad \text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega^e.$$

Entonces existe un único potencial armónico $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ tal que $\nabla\varphi = \mathbf{u}$ en Ω^e .

Demostración. Planteamos el problema variacional

$$\begin{cases} \text{hallar } \varphi \in W^1(\Omega^e) \text{ tal que} \\ (\nabla\varphi, \nabla\psi)_{0,\Omega^e} = -\langle \gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, \gamma\psi \rangle_{1/2,\Gamma} \quad \forall \psi \in W^1(\Omega^e). \end{cases} \quad (2.7.1)$$

Nótese que, en virtud de la Proposición 2.3.2 y el Lema 2.7.1, la aplicación lineal

$$\begin{aligned} W^1(\Omega^e) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \psi &\mapsto \overline{\langle \gamma_{\mathbf{n}}\mathbf{u}, \gamma\psi \rangle}_{1/2,\Gamma} \end{aligned}$$

es continua. Luego el Lema de Lax–Milgram garantiza que el problema (2.7.1) tiene solución y que ésta es única. Concluimos observando que $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ es solución del problema (2.7.1) si y sólo si $\nabla\varphi = \mathbf{u}$ en Ω^e , en cuyo caso tenemos que $\Delta\varphi = \text{div } \mathbf{u} = 0$ en Ω^e . ■

En [29, Teorema 2.9] se debilitan las hipótesis del Lema 2.7.2 como en el siguiente resultado.

Teorema 2.7.3. *Consideramos una región $\mathcal{O} \subset \mathbb{R}^3$ simplemente conexa (no necesariamente acotada) y con frontera Lipschitz continua. Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\text{rot}, \mathcal{O})$. Entonces $\text{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$ en \mathcal{O} si y sólo si existe un potencial $\varphi \in W^1(\mathcal{O})$ con $\nabla\varphi = \mathbf{u}$ en \mathcal{O} , en cuyo caso este potencial es único.*

Introducimos la función $\Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$, que es la solución fundamental del operador de Laplace en \mathbb{R}^3 . El siguiente teorema de representación puede consultarse en [46, Teorema 3.1.1].

Teorema 2.7.4. *Sea $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ una función armónica. Entonces*

$$\varphi(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \gamma \varphi(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \frac{\partial \varphi}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega^e. \quad (2.7.2)$$

2.7.1. Operadores integrales sobre superficies

Definimos los potenciales de simple y doble capa sobre la superficie Γ :

$$\begin{aligned} \mathcal{V}\lambda(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma, \\ \mathcal{K}\lambda(\mathbf{x}) &:= \int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \lambda(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma. \end{aligned}$$

También introducimos el operador hipersingular sobre Γ :

$$\mathcal{N}\lambda(\mathbf{x}) := -\frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} \left[\int_{\Gamma} \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \lambda(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \right] \quad \forall \mathbf{x} \in \Gamma.$$

Las siguientes propiedades de los operadores de simple y doble capa son clásicas y pueden consultarse en [25, Teoremas 1 y 3].

Teorema 2.7.5. *Dado $s \in [-1/2, 1/2]$, los operadores lineales*

$$\mathcal{V} : H^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma) \quad \text{y} \quad \mathcal{K} : H^{1/2+s}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2+s}(\Gamma)$$

son continuos. Además, existe una constante $\alpha_1 > 0$ de forma que

$$\langle \eta, \mathcal{V}\eta \rangle_{1/2, \Gamma} \geq \alpha_1 \|\eta\|_{-1/2, \Gamma}^2,$$

para todo $\eta \in H^{-1/2}(\Gamma)$. También se tiene que, si una función $\eta \in H^{-1/2}(\Gamma)$ cumple que $\mathcal{V}\eta \in H^{1/2+s}(\Gamma)$ para algún $s \in [0, 1/2]$, entonces $\eta \in H^{-1/2+s}(\Gamma)$ y

$$\|\eta\|_{-1/2+s, \Gamma} \leq C (\|\eta\|_{-1/2, \Gamma} + \|\mathcal{V}\eta\|_{1/2+s, \Gamma}).$$

Denotamos por $\mathbf{V} : \mathbf{H}^{-1/2+s}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}^{1/2+s}(\Gamma)$ el operador de simple capa actuando por componentes ($s \in [-1/2, 1/2]$). Las siguientes propiedades del operador $\mathbf{V}_\tau := \gamma_\tau \circ \mathbf{V}$ quedan probadas en [19, Teorema 4.2].

Teorema 2.7.6. *El operador lineal*

$$\mathbf{V}_\tau : \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{H}_\times^{1/2}(\Gamma)$$

es continuo y autoadjunto. Además, existe una constante $\alpha_2 > 0$ tal que

$$\langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \mathbf{V}_\tau(\mathbf{rot}_\Gamma \eta) \rangle_{\tau, \Gamma} \geq \alpha_2 \|\mathbf{rot}_\Gamma \eta\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)}^2,$$

para cada $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Dado $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, definimos el potencial de doble capa

$$\tilde{\mathcal{K}}\eta(\mathbf{x}) := \int_\Gamma \frac{\partial \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_\mathbf{y}} \eta(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega \cup \Omega^e.$$

Para estudiar la regularidad de este operador, introducimos

$$H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e) := \{u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); u|_\Omega \in H^1(\Omega)/\mathbb{C}, u|_{\Omega^e} \in W^1(\Omega^e)\},$$

que es un espacio de Hilbert dotado de la norma del grafo

$$\begin{aligned} H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e) &\rightarrow \mathbb{R} \\ u &\mapsto \left(|\nabla u|_{0, \Omega}^2 + |\nabla u|_{0, \Omega^e}^2 \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

También consideramos

$$Z := \left\{ u \in H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e); \Delta u = 0 \text{ en } \Omega \cup \Omega^e, \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma = 0 \text{ sobre } \Gamma \right\},$$

que es un subespacio cerrado de $H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e)$ y, en particular, de Hilbert.

Dada una función $u \in H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e)$, definimos su salto y el salto de su derivada normal a través de Γ como

$$[u]_\Gamma := \gamma(u|_\Omega) - \gamma(u|_{\Omega^e}) \quad \text{y} \quad \left[\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \right]_\Gamma := \gamma_{\mathbf{n}}(\nabla u|_\Omega) - \gamma_{\mathbf{n}}(\nabla u|_{\Omega^e}),$$

respectivamente. Entonces, para cada $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, el potencial de doble capa $\tilde{\mathcal{K}}\eta$ pertenece al espacio $H^1(\Omega)/\mathbb{C} \times W^1(\Omega^e)$ y satisface las siguientes propiedades:

$$\begin{cases} \Delta(\tilde{\mathcal{K}}\eta) = 0 & \text{en } \mathcal{D}'(\Omega \cup \Omega^e), \\ [\tilde{\mathcal{K}}\eta]_{\Gamma} = -\eta & \text{sobre } \Gamma, \\ \left[\frac{\partial(\tilde{\mathcal{K}}\eta)}{\partial \mathbf{n}}\right]_{\Gamma} = 0 & \text{sobre } \Gamma; \end{cases} \quad (2.7.3)$$

cf. [46, Párrafo 3.2.2].

Lema 2.7.7. *El operador lineal*

$$\tilde{\mathcal{K}} : H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \rightarrow Z$$

es un isomorfismo.

Demostración. Haciendo una formulación variacional de (2.7.3), deducimos que $\tilde{\mathcal{K}}\eta \in Z$ es solución del problema

$$\begin{cases} \text{hallar } u \in Z \text{ tal que} \\ (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega} + (\nabla u, \nabla v)_{0,\Omega^e} = -\overline{\left\langle \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}}, \eta \right\rangle_{1/2,\Gamma}} \quad \forall v \in Z. \end{cases} \quad (2.7.4)$$

Nótese que el Lema de Lax–Milgram garantiza que el problema (2.7.4) tiene una única solución y que ésta depende con continuidad de $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$. Así que el operador

$$\tilde{\mathcal{K}} : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow Z$$

está bien definido y es continuo. Además, este operador es suprayectivo y su núcleo es \mathbb{C} , y por lo tanto concluimos el resultado. ■

Definimos el operador $\tilde{\nabla} : Z \rightarrow \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ dado por

$$\tilde{\nabla} u := \begin{cases} \nabla(u|_{\Omega}) & \text{en } \Omega, \\ \nabla(u|_{\Omega^e}) & \text{en } \Omega^e. \end{cases}$$

Además, denotamos por $*$ el producto de convolución de distribuciones e introducimos la distribución $\delta_\Gamma \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ caracterizada por

$$\langle \delta_\Gamma, v \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} := \langle 1, v|_\Gamma \rangle_{\mathcal{D}'(\Gamma) \times \mathcal{D}(\Gamma)} \quad \forall v \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Proposición 2.7.8. *Sea $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$. Entonces*

$$\tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\eta) = -\mathbf{rot}(\Phi * (\mathbf{rot}_\Gamma \eta \delta_\Gamma)) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Demostración. En primer lugar, estudiamos cómo se relacionan las distribuciones $\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta) \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ y $\mathbf{g} := \tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\eta) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Con este fin, integramos por partes en

$$\langle \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = -(\tilde{\mathcal{K}}\eta, \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})_{0,\Omega} - (\tilde{\mathcal{K}}\eta, \operatorname{div} \bar{\mathbf{v}})_{0,\Omega^e} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3),$$

y así obtenemos que

$$\langle \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = (\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \bar{\mathbf{v}})_{0,\Omega \cup \Omega^e} - ([\tilde{\mathcal{K}}\eta]_\Gamma \mathbf{n}, \gamma \bar{\mathbf{v}})_{0,\Gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Luego, utilizando la definición de \mathbf{g} y la segunda propiedad de (2.7.3), resulta que

$$\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta) = \mathbf{g} + \eta \mathbf{n} \delta_\Gamma \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad (2.7.5)$$

Por otro lado, la primera ecuación de (2.7.3) significa que $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ en $\Omega \cup \Omega^e$, mientras que la tercera se traduce en $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}|_\Omega) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{g}|_{\Omega^e})$ sobre Γ . Luego, en virtud del Corolario 2.3.3, tenemos que $\mathbf{g} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ con $\operatorname{div} \mathbf{g} = 0$ en \mathbb{R}^3 . Así que, usando la tercera identidad de (2.0.1),

$$\mathbf{rot} \operatorname{rot} \mathbf{g} = -\Delta \mathbf{g} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Ahora, aplicando el operador $\mathbf{rot} \operatorname{rot}$ en ambos miembros de (2.7.5),

$$\mathbf{0} = -\Delta \mathbf{g} + \mathbf{rot} \operatorname{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

En consecuencia, \mathbf{g} coincide con la siguiente convolución:

$$\mathbf{g} = -\Phi * \mathbf{rot} \operatorname{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma), \quad (2.7.6)$$

que está bien definida porque la función Φ es localmente integrable y la distribución $\mathbf{rot} \mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma)$ tiene soporte compacto; véase [56, Párrafo VI.3].

En lo que respecta a la distribución $\mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma)$, observamos que

$$\langle \mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle \eta \mathbf{n} \delta_\Gamma, \mathbf{rot} \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = (\eta, \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \bar{\mathbf{v}}))_{0,\Gamma},$$

para cada $\mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$. Entonces, aplicando el Corolario 2.5.1 junto con la definición de div_Γ ,

$$\langle \mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle \eta, \text{div}_\Gamma(\gamma_\tau \mathbf{v}) \rangle_{1/2,\Gamma} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \gamma_\tau \mathbf{v} \rangle_{\tau,\Gamma}.$$

Como $\mathbf{rot}_\Gamma(H^{1/2}(\Gamma)) \subseteq \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)$, tenemos que

$$\langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \gamma_\tau \mathbf{v} \rangle_{\tau,\Gamma} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \gamma \mathbf{v} \rangle_{1/2,\Gamma},$$

y resulta que

$$\langle \mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma), \mathbf{v} \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)} = \langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \gamma \mathbf{v} \rangle_{1/2,\Gamma} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3).$$

Es decir,

$$\mathbf{rot}(\eta \mathbf{n} \delta_\Gamma) = \mathbf{rot}_\Gamma \eta \delta_\Gamma \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Utilizando esta propiedad junto con (2.7.6), concluimos que

$$\mathbf{g} = -\Phi * \mathbf{rot}(\mathbf{rot}_\Gamma \eta \delta_\Gamma) = -\mathbf{rot}(\Phi * (\mathbf{rot}_\Gamma \eta \delta_\Gamma)).$$

■

A continuación, utilizamos los resultados anteriores para estudiar la regularidad del operador hipersingular \mathcal{N} y para dar una expresión explícita de su forma sesquilineal asociada; cf. [41, Lema 3.4].

Teorema 2.7.9. *El operador lineal*

$$\mathcal{N} : H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma)$$

define un isomorfismo, que se denomina isomorfismo de Steklov–Poincaré. Además, se relaciona con el operador \mathbf{V}_τ a través de la siguiente identidad:

$$\langle \mathcal{N}\eta, \lambda \rangle_{1/2,\Gamma} = \overline{\langle \mathbf{rot}_\Gamma \lambda, \mathbf{V}_\tau \mathbf{rot}_\Gamma \eta \rangle_{\tau,\Gamma}}, \quad (2.7.7)$$

para cualesquiera $\eta, \lambda \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Demostración. En [46, Teorema 3.3.2] se prueba este resultado para fronteras regulares. En esta demostración seguimos el razonamiento expuesto en [46] y lo generalizamos a fronteras Lipschitz continuas.

Es conocido que la aplicación lineal

$$\begin{aligned} Z &\rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma) \\ v &\mapsto \frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

define un isomorfismo; véase [46, Párrafo 2.5.7]. Entonces, aplicando el Lema 2.7.7, deducimos que el operador

$$\begin{aligned} \mathcal{N} : H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} &\rightarrow Z \rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma) \\ \eta &\mapsto \tilde{\mathcal{K}}\eta \mapsto \mathcal{N}\eta := -\frac{\partial(\tilde{\mathcal{K}}\eta|_{\Omega})}{\partial \mathbf{n}} = -\frac{\partial(\tilde{\mathcal{K}}\eta|_{\Omega^e})}{\partial \mathbf{n}} \end{aligned}$$

es un isomorfismo.

Para demostrar la identidad (2.7.7), utilizamos la tercera ecuación de (2.7.3) e integramos por partes como sigue:

$$\langle \mathcal{N}\eta, \lambda \rangle_{1/2, \Gamma} = \left\langle \frac{\partial(\tilde{\mathcal{K}}\eta)}{\partial \mathbf{n}}, [\tilde{\mathcal{K}}\lambda]_{\Gamma} \right\rangle_{1/2, \Gamma} = (\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda))_{0, \Omega} + (\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda))_{0, \Omega^e}.$$

Nótese que, en virtud del Lema 2.7.8,

$$\tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\eta) = -\mathbf{rot}(\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma})) \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3).$$

Como $(\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma}))|_{\Omega} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$ y $\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda)|_{\Omega} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$, podemos integrar por partes con la fórmula (2.3.3):

$$(\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda))_{0, \Omega} = -\overline{\langle \gamma_{\tau}(\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda)|_{\Omega}), \gamma_{\tau}(\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma}))|_{\Omega} \rangle}_{\tau, \Gamma}.$$

Análogamente, tenemos que

$$(\nabla(\tilde{\mathcal{K}}\eta), \nabla(\tilde{\mathcal{K}}\lambda))_{0, \Omega^e} = \overline{\langle \gamma_{\tau}(\tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\lambda)|_{\Omega^e}), \gamma_{\tau}(\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma}))|_{\Omega^e} \rangle}_{\tau, \Gamma}.$$

Luego

$$\langle \mathcal{N}\eta, \lambda \rangle_{1/2, \Gamma} = -\overline{\left\langle \left[\gamma_{\tau}(\tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\lambda)) \right]_{\Gamma}, \gamma_{\tau}(\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma})) \right\rangle_{\tau, \Gamma}}.$$

Pero, utilizando las definiciones de $\tilde{\nabla}$ y \mathbf{rot}_{Γ} junto con la tercera ecuación de (2.7.3), resulta que

$$\left[\gamma_{\tau}(\tilde{\nabla}(\tilde{\mathcal{K}}\lambda)) \right]_{\Gamma} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \left[\tilde{\mathcal{K}}\lambda \right]_{\Gamma} = -\mathbf{rot}_{\Gamma}\lambda;$$

además, aplicando las definiciones del producto de convolución y del operador \mathcal{V} ,

$$\Phi * (\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \delta_{\Gamma})|_{\Gamma} = \mathcal{V}(\mathbf{rot}_{\Gamma}\eta) \quad \text{en } \mathbf{H}^{1/2}(\Gamma).$$

Por lo tanto, concluimos que

$$\langle \mathcal{N}\eta, \lambda \rangle_{1/2, \Gamma} = \overline{\langle \mathbf{rot}_{\Gamma}\lambda, \mathcal{V}_{\tau} \mathbf{rot}_{\Gamma}\eta \rangle_{\tau, \Gamma}}.$$

■

Para cada $s \in [0, 1]$, introducimos el operador identidad $\mathcal{I} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^s(\Gamma)$ y denotamos por $\mathcal{K}^* : H^{-s}(\Gamma) \rightarrow H^{-s}(\Gamma)$ el operador dual de \mathcal{K} :

$$\langle \mathcal{K}^*\lambda, \eta \rangle_{s, \Gamma} = \langle \lambda, \mathcal{K}\eta \rangle_{s, \Gamma} \quad \forall \lambda \in H^{-s}(\Gamma), \eta \in H^s(\Gamma).$$

Combinando la fórmula de representación integral (2.7.2) con las relaciones de salto de los operadores de simple y doble capa, deducimos el siguiente resultado; cf. [46, Teorema 3.1.2].

Teorema 2.7.10. *Sea $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ una función armónica. Entonces*

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)(\gamma\varphi) + \mathcal{V}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right) = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}^*\right)\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mathbf{n}}\right) + \mathcal{N}(\gamma\varphi) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (2.7.8)$$

2.8. Espacios básicos para problemas de evolución

En este apartado introducimos algunos espacios funcionales auxiliares que utilizaremos para estudiar el problema de evolución (1.1.1). Para una exposición más detallada, puede consultarse [56, Párrafo V.5].

Consideramos funciones definidas en un intervalo acotado $(0, T)$ y con valores en un espacio V que sea de Hilbert y separable dotado de la norma $\|\cdot\|_V$. En lo sucesivo, usamos indistintamente las notaciones

$$\frac{df}{dt} = \partial_t f$$

para representar la derivación con respecto a la variable temporal $t \in (0, T)$.

Sea $\mathcal{C}^0([0, T]; V)$ el espacio de las funciones continuas $f : [0, T] \rightarrow V$. Este espacio es de Banach con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; V)} := \max_{t \in [0, T]} \|f(t)\|_V.$$

En general, para cada $m \in \mathbb{N}$, el espacio

$$\mathcal{C}^m([0, T]; V) := \left\{ f \in \mathcal{C}^0([0, T]; V); \frac{d^k f}{dt^k} \in \mathcal{C}^0([0, T]; V) \forall 1 \leq k \leq m \right\}$$

es de Banach con la norma

$$\|f\|_{\mathcal{C}^m([0, T]; V)} := \max_{1 \leq k \leq m} \left\| \frac{d^k f}{dt^k} \right\|_{\mathcal{C}^0([0, T]; V)}.$$

Definimos el espacio $L^2((0, T); V)$ de las funciones $f : (0, T) \rightarrow V$ que son medibles en sentido Bőchner y tales que

$$\|f\|_{L^2((0, T); V)}^2 := \int_0^T \|f(t)\|_V^2 dt < +\infty.$$

También introducimos el espacio

$$H^1((0, T); V) := \left\{ f(t) = f_0 + \int_0^t f_1(s) ds; f_0 \in V, f_1 \in L^2((0, T); V) \right\}.$$

El siguiente resultado queda demostrado en [56, Corolario V.5.2].

Lema 2.8.1. Sean V y H dos espacios de Hilbert separables. Si $A : V \rightarrow H$ es una aplicación lineal continua, entonces

$$\int_0^t Af(s) ds = A\left(\int_0^t f(s) ds\right),$$

para cada $f \in L^2((0, T); V)$ y $t \in (0, T]$. En particular, si denotamos por V' el espacio dual de V con respecto al producto $\langle \cdot, \cdot \rangle_{V' \times V}$, entonces

$$\int_0^t \langle f(s), v \rangle_{V' \times V} ds = \left\langle \int_0^t f(s) ds, v \right\rangle_{V' \times V},$$

para cualesquiera $f \in L^2((0, T); V')$, $v \in V$ y $t \in (0, T]$.

Capítulo 3

Eddy currents en conductores simplemente conexos

En este capítulo estudiamos el problema de *eddy currents* en régimen armónico (1.2.1–1.2.2) cuando la topología del conductor es sencilla. Más concretamente, suponemos que la región conductora Ω_c es conexa y simplemente conexa, y que su frontera $\Sigma := \partial\Omega_c$ es Lipschitz continua, conexa y simplemente conexa.

También asumimos que la función dato \mathbf{j} cumple las condiciones de compatibilidad (1.2.3) y que su soporte no toca la superficie Σ . Entonces, razonando por superposición, podemos suponer que el soporte de \mathbf{j} está enteramente contenido en el conductor Ω_c ó en el dieléctrico $\Omega_c^e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}_c$. De hecho, aquí supondremos que el soporte de \mathbf{j} está enteramente contenido en Ω_c y nos remitimos al artículo [41] para el caso contrario.

3.1. Formulación variacional

En primer lugar, buscamos una formulación variacional BEM–FEM del problema (1.2.1–1.2.2) en términos del campo \mathbf{h} . Para justificar los razonamientos de este apartado, recordamos la siguiente propiedad referente al comportamiento

asintótico del campo electromagnético.

Proposición 3.1.1. *Si \mathbf{e} y \mathbf{h} son soluciones del problema (1.2.1–1.2.2), entonces*

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

uniformemente en las direcciones $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$ con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$.

Demostración. Véase [6, Proposición 3.1]. ■

A continuación, seguimos la estrategia de [14] e introducimos un potencial escalar magnético en Ω_c^e .

Dado que $\text{soporte}(\mathbf{j}) \subset \Omega_c$, la primera ecuación de (1.2.1) junto con la hipótesis (1.1.6) implican que

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \frac{1}{\sigma} (\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}) && \text{en } \Omega_c, \\ \mathbf{rot} \mathbf{h} &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_c^e. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Además, aplicando el operador div en la segunda ecuación de (1.2.1) y teniendo en cuenta la hipótesis (1.1.5),

$$\text{div} \mathbf{h} = 0 \quad \text{en } \Omega_c^e. \tag{3.1.2}$$

Las propiedades anteriores sugieren tomar una función test $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ suficientemente regular, con $\mathbf{rot} \mathbf{q} = \mathbf{0}$ y $\text{div} \mathbf{q} = 0$ en Ω_c^e . Utilizando la segunda ecuación de (1.2.1) e integrando por partes, resulta que

$$\imath \omega (\mu \mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + (\mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{q})_{0, \Omega_c} = 0.$$

Entonces eliminamos el campo \mathbf{e} de esta ecuación variacional usando la primera identidad de (3.1.1):

$$\imath \omega (\mu \mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{h}, \mathbf{rot} \mathbf{q}\right)_{0, \Omega_c} = \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{q}\right)_{0, \Omega_c}. \tag{3.1.3}$$

3.1.1. Un potencial escalar magnético

A continuación representamos el campo \mathbf{h} en el dieléctrico Ω_c^e mediante un potencial escalar armónico. Con este fin, recordamos que la función $\mathbf{h}|_{\Omega_c^e}$ satisface las propiedades (3.1.1–3.1.2) y, por lo tanto, está bajo las hipótesis del Lema 2.7.2. Así que existe un único potencial armónico $\psi \in W^1(\Omega_c^e)$ tal que

$$\nabla\psi = \mathbf{h} \quad \text{en } \Omega_c^e.$$

Nótese que, en virtud de la primera ecuación de (1.2.1), tenemos que $\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ y por lo tanto su componente tangencial es continua a través de Σ :

$$\mathbf{rot}_\Sigma \psi = \gamma_\tau(\mathbf{h}|_{\Omega_c}) \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Además, tomando el operador div en la segunda ecuación de (1.2.1), resulta que $\text{div}(\mu\mathbf{h}) = 0$ en \mathbb{R}^3 . En particular, deducimos que $\mu\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ y por lo tanto su componente normal es continua a través de Σ :

$$\mu_0 \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \gamma_{\mathbf{n}}((\mu\mathbf{h})|_{\Omega_c}) \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Análogamente, para cada función test $\mathbf{q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^3$ que sea suficientemente regular y que tenga $\text{div } \mathbf{q} = 0$ y $\mathbf{rot } \mathbf{q} = \mathbf{0}$ en Ω_c^e , existe una única función armónica $\varphi \in W^1(\Omega_c^e)$ con

$$\nabla\varphi = \mathbf{q} \quad \text{en } \Omega_c^e.$$

Además, esta función cumple que

$$\mathbf{rot}_\Sigma \varphi = \gamma_\tau(\mathbf{q}|_{\Omega_c}) \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Nota 3.1.1 Es importante subrayar que podemos aplicar el Lema 2.7.2 gracias a las hipótesis que estamos haciendo sobre la geometría del conductor Ω_c .

En la práctica, la geometría del conductor Ω_c puede ser complicada y es habitual que Ω_c^e no sea simplemente conexo. En este caso, la representación de una función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c^e)$ con $\mathbf{rot } \mathbf{u} = \mathbf{0}$ en Ω_c^e involucra los denominados *campos vectoriales de Neumann armónicos*. En consecuencia, si generalizásemos directamente

la formulación variacional que proponemos en este capítulo para conductores que no sean simplemente conexos, necesitaríamos introducir dichos campos de Neumann; cf. [41]. Desde el punto de vista numérico, la introducción de tales campos de Neumann complica la implementación y aumenta el coste computacional. Es precisamente esta dificultad la que motiva la estrategia que seguiremos en el Capítulo 4.

Ahora, integramos por partes en Ω_c^e y así reescribimos (3.1.3) como

$$\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \Omega_c} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) - \omega\mu_0 \left\langle \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}, \varphi \right\rangle_{1/2, \Sigma} = l(\mathbf{q}), \quad (3.1.4)$$

donde

$$c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{q}_1, \mathbf{rot} \mathbf{q}_2 \right)_{0, \Omega_c} \quad \text{y} \quad l(\mathbf{q}) := \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}, \mathbf{rot} \mathbf{q} \right)_{0, \Omega_c}.$$

La ecuación (3.1.4) sugiere introducir la incógnita auxiliar $\lambda := \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}$ sobre Σ . Entonces el potencial $\psi \in W^1(\Omega_c^e)$ es la solución débil del problema

$$\begin{cases} \Delta\psi = 0 & \text{en } \Omega_c^e, \\ \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}} = \lambda & \text{sobre } \Sigma. \end{cases}$$

Además, aplicando los Teoremas 2.7.4 y 2.7.10, tenemos la representación integral

$$\psi(\mathbf{x}) = \int_{\Sigma} \frac{\partial\Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y})}{\partial\mathbf{n}_\mathbf{y}} \gamma\psi(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y} - \int_{\Sigma} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \lambda(\mathbf{y}) dS_\mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x} \in \Omega_c^e, \quad (3.1.5)$$

junto con las ecuaciones integrales

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \gamma\psi + \mathcal{V}\lambda = 0 \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}^* \right) \lambda + \mathcal{N}\gamma\psi = 0 \quad \text{sobre } \Sigma. \quad (3.1.6)$$

3.1.2. Una formulación variacional BEM–FEM

Nuestro siguiente objetivo es combinar la ecuación (3.1.4) con las ecuaciones integrales (3.1.6). Para ello, hacemos una formulación variacional de la segunda ecuación de (3.1.6):

$$\langle \lambda, \gamma\varphi \rangle_{1/2, \Sigma} = \left\langle \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^* \right) \lambda, \gamma\varphi \right\rangle_{1/2, \Sigma} - \langle \mathcal{N}\gamma\psi, \gamma\varphi \rangle_{1/2, \Sigma} \quad \forall \varphi \in W^1(\Omega_c^e).$$

Entonces, usando la identidad (2.7.7) cuando $\mathbf{rot}_\Sigma \psi = \gamma_\tau \mathbf{h}$ y $\mathbf{rot}_\Sigma \varphi = \gamma_\tau \mathbf{q}$,

$$\langle \lambda, \gamma \varphi \rangle_{1/2, \Sigma} = \langle \lambda, (\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K}) \gamma \varphi \rangle_{1/2, \Sigma} - \overline{\langle \gamma_\tau \mathbf{q}, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{h}) \rangle}_{\tau, \Sigma}.$$

Esta propiedad nos permite reescribir la ecuación (3.1.4) como

$$\begin{aligned} \omega(\mu \mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \Omega_c} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + \omega \mu_0 \overline{\langle \gamma_\tau \mathbf{q}, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{h}) \rangle}_{\tau, \Sigma} \\ - \omega \mu_0 \langle \lambda, (\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K}) \gamma \varphi \rangle_{1/2, \Sigma} = l(\mathbf{q}). \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

En consecuencia, buscamos dos funciones $\mathbf{h} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ y $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$, junto con un potencial armónico $\psi \in W^1(\Omega_c^e)$, de forma que

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K}) \gamma \psi + \mathcal{V} \lambda &= 0, \\ \mathbf{rot}_\Sigma \psi &= \gamma_\tau \mathbf{h}, \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

y que además cumplan la ecuación variacional (3.1.7) para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ y el correspondiente potencial armónico $\varphi \in W^1(\Omega_c^e)$ con $\mathbf{rot}_\Sigma \varphi = \gamma_\tau \mathbf{q}$.

Nótese que, según la Proposición 2.5.1 y el Lema 2.6.4,

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{h}) = \operatorname{div}_\Sigma(\gamma_\tau \mathbf{h}) = \operatorname{div}_\Sigma(\mathbf{rot}_\Sigma \psi) = 0;$$

es decir $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\Omega_c)$, donde

$$\mathbf{X}(\Omega_c) := \{ \mathbf{u} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c); \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = 0 \text{ sobre } \Sigma \}.$$

Análogamente, puede comprobarse que las funciones test \mathbf{q} utilizadas en (3.1.8) pertenecen al espacio $\mathbf{X}(\Omega_c)$.

Proposición 3.1.2. *El espacio $\mathbf{X}(\Omega_c)$ es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$.*

Demostración. En virtud de la Proposición 2.3.2, el operador

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c) &\rightarrow \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_c) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma) \\ \mathbf{u} &\mapsto \mathbf{rot} \mathbf{u} \mapsto \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}), \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

es continuo. Luego su núcleo, $\mathbf{X}(\Omega_c)$, es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$. ■

Por otro lado, es conocido que $\mathcal{K}1 = \frac{1}{2}$ y entonces el Teorema 2.7.5 garantiza que el siguiente operador está bien definido y es continuo:

$$\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K} : H^{1/2}(\Sigma)/\mathbb{C} \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)/\mathbb{C}.$$

Además, en virtud de la Proposición 2.5.1 y del Teorema 2.5.2,

$$\gamma_\tau \mathbf{X}(\Omega_c) = \ker(\operatorname{div}_\Sigma) \cap \mathbf{H}_\times^{-1/2}(\operatorname{div}_\Sigma, \Sigma).$$

Entonces, usando el Corolario 2.6.6, deducimos que el operador lineal

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \circ \mathbf{rot}_\Sigma^{-1} \circ \gamma_\tau : \mathbf{X}(\Omega_c) \rightarrow H^{1/2}(\Sigma)/\mathbb{C}$$

está bien definido y es acotado. En efecto, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathcal{B}\mathbf{q}\|_{1/2,\Sigma} \leq C \|\gamma_\tau \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Sigma)} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega_c). \quad (3.1.10)$$

Utilizando este operador, podemos eliminar los potenciales ψ y φ de nuestro problema. Más concretamente, tenemos que

$$\mathcal{B}\mathbf{h} = \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma_\tau \psi \quad \text{y} \quad \mathcal{B}\mathbf{q} = \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma_\tau \varphi,$$

en virtud de la segunda ecuación de (3.1.8) y la condición $\mathbf{rot}_\Sigma \varphi = \gamma_\tau \mathbf{q}$ sobre la función test. Entonces, el problema (3.1.7–3.1.8) consiste en buscar dos funciones $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\Omega_c)$ y $\lambda \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$ tales que

$$\begin{aligned} \omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0,\Omega_c} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + \omega\mu_0 \overline{\langle \gamma_\tau \mathbf{q}, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{h}) \rangle}_{\tau,\Sigma} - \omega\mu_0 \langle \lambda, \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_{1/2,\Sigma} &= l(\mathbf{q}), \\ \omega\mu_0 \overline{\langle \eta, \mathcal{B}\mathbf{h} \rangle}_{1/2,\Sigma} + \omega\mu_0 \overline{\langle \eta, \mathcal{V}\lambda \rangle}_{1/2,\Sigma} &= 0, \end{aligned}$$

para cualesquiera $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega_c)$ y $\eta \in H_0^{-1/2}(\Sigma)$.

Introducimos el espacio $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c) := \mathbf{X}(\Omega_c) \times H_0^{-1/2}(\Sigma)$ y definimos las formas sesquilineales

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &:= \omega(\mu\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_{0,\Omega_c} + \omega\mu_0 \overline{\langle \gamma_\tau \mathbf{q}_2, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{q}_1) \rangle}_{\tau,\Sigma}, \\ a(\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2) &:= a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \omega\mu_0 \left(\overline{\langle \eta_2, \mathcal{V}\eta_1 \rangle}_{1/2,\Sigma} + \overline{\langle \eta_2, \mathcal{B}\mathbf{q}_1 \rangle}_{1/2,\Sigma} - \langle \eta_1, \mathcal{B}\mathbf{q}_2 \rangle_{1/2,\Sigma} \right), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\widehat{\mathbf{q}}_1 = (\mathbf{q}_1, \eta_1)$, $\widehat{\mathbf{q}}_2 = (\mathbf{q}_2, \eta_2) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)$. Con esta notación, reescribimos el problema variacional anterior:

Problema 3.1.1 Hallar $\widehat{\mathbf{h}} \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)$ tal que

$$a(\widehat{\mathbf{h}}, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c).$$

Teorema 3.1.3. *El Problema 3.1.1 tiene solución y ésta es única.*

Demostración. Para cada $\widehat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)$, aplicando el Teorema 2.7.5,

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1-\nu}{\omega\mu_0} a(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{q}}) \right] = \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}, \mathbf{q} \right)_{0, \Omega_c} + \langle \boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{q}, \boldsymbol{\nu}_\tau(\boldsymbol{\gamma}_\tau \mathbf{q}) \rangle_{\tau, \Sigma} + \langle \eta, \boldsymbol{\nu} \eta \rangle_{1/2, \Sigma},$$

y resulta que

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1-\nu}{\omega\mu_0} (a(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{q}, \mathbf{q})) \right] \geq \alpha \|\widehat{\mathbf{q}}\|_{\widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)}^2,$$

donde

$$\alpha := \min \left\{ 1, \frac{1}{\omega\mu_0\sigma_1}, \alpha_1 \right\} > 0.$$

Teniendo en cuenta esta propiedad, podemos reescalar el Problema 3.1.1 de modo que esté bajo las hipótesis del Lema de Lax–Milgram y así concluimos el resultado. ■

3.2. Esquema discreto

En este apartado proponemos una versión discreta del Problema 3.1.1 y demostramos que ésta tiene una única solución. También hacemos un análisis *a priori* del orden del error cometido al aproximar la solución exacta por la solución del problema discreto.

En lo que sigue, suponemos que el dominio Ω_c es poliédrico y denotamos por $\{\mathcal{T}_h(\Omega_c); h > 0\}$ una familia regular de mallas tetraédricas de Ω_c . Además, definimos $\mathcal{T}_h(\Sigma)$ como la triangulación que induce $\mathcal{T}_h(\Omega_c)$ sobre la superficie Σ ,

$$\mathcal{T}_h(\Sigma) := \{F \text{ cara de algún } T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c); F \subset \Sigma\}.$$

3.2.1. Elementos finitos de Nédélec de primer orden

Aproximamos el espacio $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ utilizando *elementos finitos de Nédélec de primer orden*, también conocidos como *elementos de arista*. En la literatura, estos elementos aparecen descritos de forma independiente por varios autores, siendo H. Whitney el primero del que tenemos constancia; cf. [55]. En lo que respecta a los elementos de Nédélec de orden mayor que uno, fueron introducidos por J.-C. Nédélec en [47] y de ahí su denominación.

Fijado un tetraedro $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c)$ y dado $m \in \mathbb{N}$, sea $\mathbb{P}_m(T)$ el espacio de polinomios definidos en T y de grado no mayor que m . Consideramos

$$\mathcal{ND}(T) := \{\mathbf{a} \wedge \mathbf{x} + \mathbf{b}; \mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3\},$$

que es un subespacio de $(\mathbb{P}_1(T))^3$ con dimensión 6.

Para cada arista E de T , denotamos por $\boldsymbol{\tau}_E^T$ un vector unitario tangente a E y definimos

$$m_E^T(\mathbf{p}) := \int_E \mathbf{p}(\mathbf{x}) \cdot \boldsymbol{\tau}_E^T dL_{\mathbf{x}},$$

siempre que $\mathbf{p} : T \rightarrow \mathbb{C}^3$ sea una función suficientemente regular.

Introducimos el conjunto $\mathcal{GL}(T) := \{m_E^T; E \text{ arista de } T\}$. Entonces la terna $(T, \mathcal{ND}(T), \mathcal{GL}(T))$ define un elemento finito, que se dice *elemento de Nédélec de primer orden* ó *elemento de arista*; cf. [45, Lema 5.36].

Consideramos el espacio de elementos finitos global asociado:

$$\mathcal{ND}_h(\Omega_c) = \{\mathbf{v}_h \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c); \mathbf{v}_h|_T \in \mathcal{ND}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c)\}. \quad (3.2.1)$$

Para cada $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c)$, denotamos por \mathcal{I}_T el operador de *interpolación local* asociado al espacio $\mathcal{ND}(T)$. Es decir, dada una función $\mathbf{u} : T \rightarrow \mathbb{C}^3$ suficientemente regular, el elemento $\mathcal{I}_T \mathbf{u} \in \mathcal{ND}(T)$ se caracteriza por

$$m_E^T(\mathcal{I}_T \mathbf{u}) = m_E^T(\mathbf{u}) \quad \forall E \text{ arista de } T.$$

Ahora podemos definir el operador de *interpolación global* asociado al espacio $\mathcal{ND}_h(\Omega_c)$. Más concretamente, dada una función $\mathbf{u} : \bar{\Omega}_c \rightarrow \mathbb{C}^3$ que sea

suficientemente regular, definimos $\mathcal{I}_h \mathbf{u} \in \mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$ como

$$(\mathcal{I}_h \mathbf{u})|_T = \mathcal{I}_T(\mathbf{u}|_T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c). \quad (3.2.2)$$

En efecto, el siguiente resultado garantiza que esta definición es adecuada; cf. [2, Lema 5.1] ó bien [45, Lema 5.38].

Lema 3.2.1. *Para cada $s > 1/2$, el operador lineal*

$$\mathcal{I}_h : \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) \rightarrow \mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$$

está bien definido y es acotado.

En el siguiente resultado recogemos algunas de las propiedades de aproximación del espacio $\mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$ demostradas en [2, Proposición 5.6] y en [45, Teorema 5.41].

Teorema 3.2.2. *Para cada $s \in (1/2, 1]$, existe una constante $C > 0$ con*

$$\|\mathbf{q} - \mathcal{I}_h \mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c} \leq C h^s \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c)},$$

para cualquier función $\mathbf{q} \in \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ y todo $h > 0$ suficientemente pequeño.

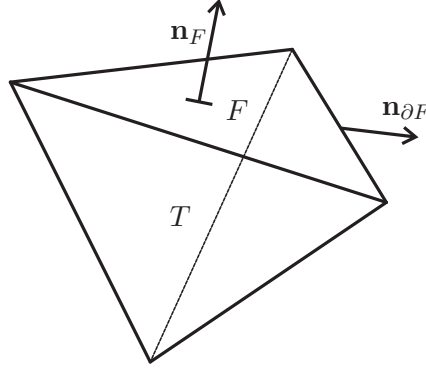
Sean T un tetraedro de $\mathcal{T}_h(\Omega_c)$ y F una cara de T . Definimos

$$|F| := \int_F 1 dS_{\mathbf{x}},$$

que se dice *medida de F* . Denotamos por \mathbf{n}_F el vector unitario normal a F con orientación hacia el exterior de T . Además, en casi todo punto de ∂F definimos un vector unitario $\mathbf{n}_{\partial F}$ que está sobre el plano que contiene a F y que es normal a ∂F con orientación hacia el exterior de F . Véase la Figura 3.1 a continuación.

Lema 3.2.3. *Sea \mathbf{u} una función de $\mathbf{H}^2(T)$. Entonces*

$$\int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) dS_{\mathbf{x}} = \sum_{E \text{ lado de } F} (\mathbf{n}_F \wedge \mathbf{n}_{\partial F})|_E \cdot \boldsymbol{\tau}_E^T \mathbf{m}_E^T(\mathbf{u}). \quad (3.2.3)$$

Figura 3.1: Vectores \mathbf{n}_F y $\mathbf{n}_{\partial F}$

Demostración. Consideramos una función $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{T})$. Aplicando sucesivamente la Proposición 2.5.1 en el dominio $T \subset \mathbb{R}^3$ y la fórmula de Stokes sobre la superficie F , resulta que

$$\int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) dS_{\mathbf{x}} = \int_F \operatorname{div}_{\partial T}(\gamma_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{u}) dS_{\mathbf{x}} = \int_{\partial F} (\gamma_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}_{\partial F} dL_{\mathbf{x}}.$$

Ahora bien, según la definición (2.2.4) y las identidades vectoriales (2.0.1),

$$(\gamma_{\boldsymbol{\tau}} \mathbf{u})|_E \cdot \mathbf{n}_{\partial F} = (\mathbf{n}_F \wedge \mathbf{n}_{\partial F}) \cdot \mathbf{u}|_E \quad \text{y} \quad (\mathbf{n}_F \wedge \mathbf{n}_{\partial F})|_E = (\mathbf{n}_F \wedge \mathbf{n}_{\partial F})|_E \cdot \boldsymbol{\tau}_E^T \boldsymbol{\tau}_E^T,$$

para cada lado E de F . En consecuencia, la ecuación (3.2.3) se cumple para cada función $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\bar{T})$. Finalmente, el Teorema de trazas 2.2.1 nos permite concluir con un razonamiento por densidad. ■

Lema 3.2.4. Sea \mathbf{p} una función de $\mathcal{N}\mathcal{D}(T)$ tal que $m_E^T(\mathbf{p}) = 0$ para toda arista E de F . Entonces $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{p}) = 0$ sobre F .

Demostración. Consideramos una función $\mathbf{p} \in \mathcal{N}\mathcal{D}(T)$ bajo las hipótesis del enunciado. Entonces, por un lado, el Lema 3.2.3 garantiza que

$$\int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{p}) dS_{\mathbf{x}} = \sum_{E \text{ lado de } F} (\mathbf{n}_F \wedge \mathbf{n}_{\partial F})|_E \cdot \boldsymbol{\tau}_E^T m_E^T(\mathbf{p}) = 0.$$

Por otro lado, tenemos que $\mathbf{rot} \mathbf{p} \in \mathbb{C}^3$ es constante en T y, en particular, $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{p}) \in \mathbb{C}$ es constante sobre F . Así que

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{p}) = \frac{1}{|F|} \int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{p}) dS_{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{sobre } F.$$

■

3.2.2. Descripción y análisis del problema discreto

Para resolver numéricamente el Problema 3.1.1, aproximamos las funciones del espacio $\mathbf{X}(\Omega_c)$ con las del espacio de dimensión finita

$$\mathbf{X}_h(\Omega_c) := \mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c) \cap \mathbf{X}(\Omega_c). \quad (3.2.4)$$

Proposición 3.2.5. *Sea $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) \cap \mathbf{X}(\Omega_c)$, con $s \in (1/2, 1]$. Entonces $\mathcal{I}_h \mathbf{u} \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)$.*

Demostración. Por definición, $\mathcal{I}_h \mathbf{u} \in \mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$. Así que lo que estudiaremos es si $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u}))$ se anula sobre Σ . Con este fin, introducimos la función auxiliar $\mathbf{u}_h := \mathbf{u} - \mathcal{I}_h \mathbf{u}$ y consideramos una cara $F \in \mathcal{T}_h(\Sigma)$ de un tetraedro $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c)$. Nótese que

$$m_E^T(\mathbf{u}_h|_T) = m_E^T(\mathbf{u}|_T) - m_E^T(\mathcal{I}_T(\mathbf{u}|_T)) = 0 \quad \forall E \text{ arista de } F.$$

Aplicando el Lema 3.2.3, deducimos que

$$\int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}_h) dS_{\mathbf{x}} = 0.$$

Entonces, utilizando la propia definición de \mathbf{u}_h y la hipótesis $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) = 0$,

$$\int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u})) dS_{\mathbf{x}} = \int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{u}) dS_{\mathbf{x}} = 0.$$

Además, $\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u})$ es constante en T y, en particular, $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u}))$ es constante sobre F . Por lo tanto, concluimos que

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u})) = \frac{1}{|F|} \int_F \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{u})) dS_{\mathbf{x}} = 0 \quad \text{sobre } F.$$

■

Por otro lado, aproximamos las funciones de $H_0^{-1/2}(\Sigma)$ con funciones que son constantes sobre cada cara de $\mathcal{T}_h(\Sigma)$. Es decir, utilizamos el espacio de dimensión finita

$$\Lambda_h(\Sigma) := \{\eta \in L^2(\Sigma); \eta|_F \in \mathbb{C} \forall F \in \mathcal{T}_h(\Sigma)\} \cap H_0^{-1/2}(\Sigma). \quad (3.2.5)$$

Denotando $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c) := \mathbf{X}_h(\Omega_c) \times \Lambda_h(\Sigma)$, proponemos el siguiente *método de Galerkin* para aproximar la solución del Problema 3.1.1.

Problema 3.2.1 Hallar $\widehat{\mathbf{h}}_h = (\mathbf{h}_h, \lambda_h) \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c)$ tal que

$$a(\widehat{\mathbf{h}}_h, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{h}_h, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c).$$

Proposición 3.2.6. *El problema discreto 3.2.1 está bien planteado.*

Demostración. Basta recordar que la forma sesquilineal

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c) \times \widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2) &\mapsto \frac{1-\nu}{\omega\mu_0} (a(\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2) + c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)) \end{aligned}$$

es elíptica; véase la demostración del Teorema 3.1.3. ■

Como consecuencia directa del resultado anterior, se cumple una estimación tipo *Lema de Céa*:

$$\|\widehat{\mathbf{h}} - \widehat{\mathbf{h}}_h\|_{\widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)} \leq C \|\widehat{\mathbf{h}} - \widehat{\mathbf{q}}\|_{\widehat{\mathbf{X}}(\Omega_c)} \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c), \quad (3.2.6)$$

siendo $C > 0$ una constante independiente del parámetro de discretización h .

Nota 3.2.1 Es importante señalar que la inversa del operador tangencial \mathbf{rot}_Γ está involucrada en la definición de la forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ y, en consecuencia, nuestro método numérico parece difícil de implementar y computacionalmente costoso. Sin embargo, esto no sucede en la práctica porque dicho operador puede eliminarse en el cálculo efectivo de la matriz del sistema lineal asociado al Problema 3.2.1. Al respecto, véase el Párrafo 3.3.

3.2.3. Análisis de la convergencia

En este apartado analizamos el error cometido al aproximar la solución del Problema 3.1.1 con la del Problema 3.2.1. Con este fin, primero estudiamos los errores de aproximación asociados a $\mathbf{X}_h(\Omega_c)$ y $\Lambda_h(\Sigma)$ como subespacios de $\mathbf{X}(\Omega_c)$ y $H^{-1/2}(\Sigma)$, respectivamente.

Por un lado, fijado $s \in (1/2, 1]$, la Proposición 3.2.5 permite acotar el error correspondiente al espacio $\mathbf{X}_h(\Omega_c)$ con la estimación del error de interpolación:

$$\inf_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)} \|\mathbf{u} - \mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c} \leq \|\mathbf{u} - \mathcal{I}_h \mathbf{u}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) \cap \mathbf{X}(\Omega_c).$$

Entonces, utilizando el Teorema 3.2.2,

$$\inf_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)} \|\mathbf{u} - \mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c} \leq C h^s \|\mathbf{u}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c)} \quad \forall \mathbf{u} \in \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) \cap \mathbf{X}(\Omega_c). \quad (3.2.7)$$

Por otro lado, para estudiar el error asociado al espacio $\Lambda_h(\Sigma)$ utilizamos el siguiente resultado clásico.

Proposición 3.2.7. *Para cada $s \in (1/2, 1]$, existe una constante $C > 0$ con*

$$\inf_{\eta \in \Lambda_h(\Sigma)} \|\varphi - \eta\|_{-1/2, \Sigma} \leq C h^s \|\varphi\|_{-1/2+s, \Sigma}, \quad (3.2.8)$$

para cualquier $\varphi \in H^{-1/2+s}(\Sigma)$ y siempre que $h > 0$ sea suficientemente pequeño.

Ahora, aplicando la desigualdad tipo *Lema de Céa* (3.2.6) junto con las estimaciones (3.2.7) y (3.2.8), obtenemos la siguiente *estimación del error asociado al esquema discreto*.

Teorema 3.2.8. *Supongamos que la solución $\widehat{\mathbf{h}} = (\mathbf{h}, \lambda)$ del Problema 3.1.1 pertenece al espacio $\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c) \times H^{-1/2+s}(\Sigma)$ para algún $s \in (1/2, 1]$. Entonces tenemos la siguiente estimación de error:*

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2, \Sigma} \leq C h^s (\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega_c)} + \|\lambda\|_{-1/2+s, \Sigma}).$$

3.3. Forma matricial del esquema discreto

En este apartado reescribimos el Problema 3.2.1 como un sistema lineal. Con este fin, primero determinamos una base explícita del espacio $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c)$ y a continuación reformulamos el problema en forma matricial.

3.3.1. Base explícita de $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega_c)$

Sea $\mathcal{A}_h(\Omega_c)$ el conjunto de las aristas de la malla $\mathcal{T}_h(\Omega_c)$ y denotamos por $\mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$ el conjunto de las aristas interiores, es decir,

$$\mathcal{A}_h^0(\Omega_c) := \{E \in \mathcal{A}_h(\Omega_c); E \cap \Omega_c \neq \emptyset\}.$$

También introducimos el conjunto $\mathcal{V}_h(\Omega_c)$ de vértices de la malla $\mathcal{T}_h(\Omega_c)$, así como

$$\mathcal{V}_h(\Sigma) := \{v \in \mathcal{V}_h(\Omega_c); v \in \Sigma\}.$$

Para cada $E \in \mathcal{A}_h(\Omega_c)$, sea \mathbf{q}_E el elemento de $\mathcal{ND}_h(\Omega_c)$ caracterizado por

$$m_{E'}(\mathbf{q}_E) = \delta_{E,E'} \quad \forall E' \in \mathcal{A}_h(\Omega_c).$$

Análogamente, para cada $v \in \mathcal{V}_h(\Omega_c)$, sea φ_v la función de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}_c)$ que cumple

$$\varphi_v|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c) \quad \text{y} \quad \varphi_v(v') = \delta_{v,v'} \quad \forall v' \in \mathcal{V}_h(\Omega_c).$$

Proposición 3.3.1. *Fijado $v_0 \in \mathcal{V}_h(\Sigma)$, el conjunto*

$$B_h(\Omega_c) := \{\mathbf{q}_E; E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)\} \cup \{\nabla \varphi_v; v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}\}$$

define una base de $\mathbf{X}_h(\Omega_c)$.

Demostración. En primer lugar, estudiamos si

$$B_h(\Omega_c) \subset \mathbf{X}_h(\Omega_c).$$

Por un lado, para cada $E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$ sabemos que $\mathbf{q}_E \in \mathcal{ND}_h(\Omega_c)$ y que $m_{E'}(\mathbf{q}_E) = 0$ para toda arista $E' \subset \Sigma$. Entonces el Lema 3.2.4 garantiza que $\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{q}_E) = 0$ sobre cada $F \in \mathcal{F}_h(\Sigma)$ y por tanto $\mathbf{q}_E \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)$.

Por otro lado, para cualquier $v \in \mathcal{V}_h(\Sigma)$, la función $\nabla\varphi_v \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ es constante en cada $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c)$. Luego $\nabla\varphi \in \mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$ y, como $\mathbf{rot}(\nabla\varphi_v) = \mathbf{0}$ en Ω_c , resulta que $\nabla\varphi_v \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)$.

En segundo lugar, estudiamos si $B_h(\Omega_c)$ es linealmente independiente. Para ello, fijamos $a_E, a_v \in \mathbb{C}$ ($E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$, $v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}$) tales que

$$\sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} a_E \mathbf{q}_E + \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_v \nabla\varphi_v = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_c. \quad (3.3.1)$$

Por la propia definición del operador \mathbf{rot}_Σ , sabemos que $\gamma_\tau(\nabla\varphi_v) = \mathbf{rot}_\Sigma \varphi_v$ para cada $v \in \mathcal{V}_h(\Sigma)$. Además, dada $E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$, tenemos que $m_{E'}(\mathbf{q}_E) = 0$ para cada arista $E' \subset \Sigma$ y, en consecuencia, $\gamma_\tau \mathbf{q}_E = \mathbf{0}$. Luego, tomando el operador γ_τ en ambos miembros de (3.3.1), resulta que

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_v \mathbf{rot}_\Sigma \varphi_v = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Esta propiedad junto con el Teorema 2.6.3 garantizan que $\sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_v \varphi_v$ es

constante sobre Σ . Como $\sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_v \varphi_v(v_0) = 0$, deducimos que

$$\sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_v \varphi_v = 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

En particular, evaluando en cada $v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}$,

$$a_v = \sum_{v' \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} a_{v'} \varphi_{v'}(v) = 0 \quad \forall v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}.$$

Ahora la identidad (3.3.1) se reescribe como

$$\sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} a_E \mathbf{q}_E = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega_c.$$

En particular, tomando el operador m_E para cada $E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$,

$$a_E = \sum_{E' \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} a_{E'} m_E(\mathbf{q}_{E'}) = 0 \quad \forall E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c).$$

Finalmente, estudiamos si $B_h(\Omega_c)$ es un sistema generador de $\mathbf{X}_h(\Omega_c)$. Con este objetivo, consideramos $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega_c)$ arbitrario. Según la Proposición 2.5.1,

$$\operatorname{div}_\Sigma(\gamma_\tau \mathbf{q}) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{q}) = 0 \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Entonces el Corolario 2.6.6 garantiza que existe un potencial $\psi \in H^{1/2}(\Sigma)$ con

$$\mathbf{rot}_\Sigma \psi = \gamma_\tau \mathbf{q},$$

y este potencial es único salvo constante aditiva. Nótese que

$$(\mathbf{rot}_\Sigma \psi)|_{T \cap \Sigma} = (\gamma_\tau \mathbf{q})|_{T \cap \Sigma} \in \mathbb{C}^3 \quad (\text{constante}) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c).$$

Luego la función $\psi \in H^{1/2}(\Sigma)$ es polinomial a trozos, es decir

$$\psi|_F \in \mathbb{P}_1(F) \quad \forall F \in \mathcal{T}_h(\Sigma),$$

y en consecuencia $\psi \in \mathcal{C}(\Sigma)$. Introducimos la función $\psi_0 := \psi - \psi(v_0) \in \mathcal{C}(\Sigma)$, que es polinomial a trozos y cumple que $\psi_0(v_0) = 0$ y $\mathbf{rot}_\Sigma \psi_0 = \gamma_\tau \mathbf{q}$. Definimos

$$\tilde{\psi}_0 := \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} \psi_0(v) \varphi_v \quad \text{en } \Omega_c,$$

que es un levantamiento de ψ_0 polinomial a trozos:

$$\tilde{\psi}_0|_\Sigma = \psi_0 \quad \text{sobre } \Sigma \quad \text{y} \quad \tilde{\psi}_0|_T \in \mathbb{P}_1(T) \quad \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_c).$$

Entonces la función $\mathbf{q} - \nabla \tilde{\psi}_0$ pertenece al espacio $\mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c)$ y satisface

$$\gamma_\tau(\mathbf{q} - \nabla \tilde{\psi}_0) = \gamma_\tau \mathbf{q} - \mathbf{rot}_\Sigma(\tilde{\psi}_0|_\Sigma) = \gamma_\tau \mathbf{q} - \mathbf{rot}_\Sigma \psi_0 = \mathbf{0} \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Como el espacio $\mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega_c) \cap \ker \gamma_\tau$ está generado por $\{\mathbf{q}_E; E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)\}$, concluimos que

$$\mathbf{q} = \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} \psi_0(v) \nabla \varphi_v + \sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} m_E(\mathbf{q} - \nabla \tilde{\psi}_0) \mathbf{q}_E.$$

■

Para cada $F \in \mathcal{T}_h(\Sigma)$, denotamos por χ_F su función característica. Entonces, fijada una cara $F_0 \in \mathcal{T}_h(\Sigma)$, el conjunto

$$\left\{ \rho_F := \frac{1}{|F|} \chi_F - \frac{1}{|F_0|} \chi_{F_0}; \quad F \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\} \right\}$$

constituye una base de $\Lambda_h(\Sigma)$.

3.3.2. Sistema de ecuaciones asociado al problema discreto

Expresamos las incógnitas del Problema 3.2.1 en términos de las bases de los espacios $\mathbf{X}_h(\Omega_c)$ y $\Lambda_h(\Sigma)$ propuestas en el apartado anterior:

$$\mathbf{h}_h = \sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} h_E \mathbf{q}_E + \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} h_v \nabla \varphi_v \quad \text{y} \quad \lambda_h = \sum_{F \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\}} \lambda_F \rho_F.$$

Definimos las matrices complejas

$$\begin{aligned} A_{E,E'}^{\Omega_c} &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'} \right)_{0,\Omega_c}, & C_{E,E'} &:= -\frac{\nu}{\omega \mu_0} c(\mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'}), \\ A_{E,v}^{\Omega_c \Sigma} &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \nabla \varphi_v \right)_{0,\Omega_c}, & A_{v,v'}^{\Sigma} &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \nabla \varphi_v, \nabla \varphi_{v'} \right)_{0,\Omega_c}, \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

$$R_{v,v'} := (\mathbf{rot}_{\Sigma} \varphi_{v'}, \mathbf{v}_{\tau}(\mathbf{rot}_{\Sigma} \varphi_v))_{0,\Sigma}, \quad B_{F,v} := (\rho_F, \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)(\gamma \varphi_v))_{0,\Sigma},$$

$$V_{F,F'} := (\rho_{F'}, \mathcal{V} \rho_F)_{0,\Sigma},$$

para cualesquiera aristas interiores $E, E' \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)$; vértices sobre la frontera $v, v' \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}$ y caras de la frontera $F, F' \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\}$.

Con esta notación, el Problema 3.2.1 es equivalente a determinar los vectores

$$\mathbf{h}^{\Omega_c} := (h_E)_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)}, \quad \mathbf{h}^{\Sigma} := (h_v)_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}} \quad \text{y} \quad \boldsymbol{\lambda} := (\lambda_F)_{F \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\}},$$

solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A^{\Omega_c} + C & A^{\Omega_c \Sigma} & 0 \\ (A^{\Omega_c \Sigma})^{\top} & A^{\Sigma} + R & B^{\top} \\ 0 & B & V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^{\Omega_c} \\ \mathbf{h}^{\Sigma} \\ -\boldsymbol{\lambda} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^{\Omega_c} \\ \mathbf{f}^{\Sigma} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}, \quad (3.3.3)$$

donde el término independiente viene dado por

$$\mathbf{f}^{\Omega_c} := -\frac{\iota}{\omega\mu_0} (l(\mathbf{q}_E))_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_c)} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}^\Sigma := -\frac{\iota}{\omega\mu_0} (l(\nabla\varphi_v))_{v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}}.$$

3.3.3. Implementación del esquema discreto

Para implementar el método (3.2.1), necesitamos calcular las integrales involucradas en el ensamblaje de la matriz y del segundo miembro del sistema lineal (3.3.3). Por esta razón, diseñamos *fórmulas de cuadratura* que sean adecuadas para aproximar las integrales que no podamos evaluar de forma exacta. Es importante subrayar que tales fórmulas de cuadratura deben mantener un compromiso entre su complejidad computacional y el error cometido al aproximar la integral exacta por la integral numérica. En el Apéndice A detallamos la estrategia que seguimos.

Además, para implementar el método (3.2.1) también necesitamos resolver el sistema (3.3.3) de forma eficiente. Al respecto, recordemos que la matriz del sistema (3.3.3) es simétrica, no hermítica, y definida positiva. En esta situación, H.A. van der Vorst y J.B.M. Melissen proponen un método iterativo basado en una relación recursiva de dos términos muy similar a la del gradiente conjugado; cf. [54]. Tal y como mostramos en el siguiente apartado, los resultados numéricos obtenidos con este método son satisfactorios; además, nos gustaría señalar su simplicidad de implementación y bajo coste computacional.

3.4. Resultados numéricos

Hemos implementado el método numérico descrito en este capítulo mediante un código MATLAB. A continuación presentamos algunos resultados numéricos obtenidos con dicho código para un problema test con solución conocida explícitamente. Así validamos el código y comprobamos experimentalmente las propiedades de convergencia del método numérico.

3.4.1. Descripción del problema test

Nótese que, si fijamos el campo \mathbf{e} , entonces los campos \mathbf{h} , \mathbf{j} asociados al problema (1.2.1–1.2.2) quedan determinados como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{h} &= \frac{i}{\omega\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e} && \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{rot} \mathbf{h} - \sigma \mathbf{e} && \text{en } \Omega_c, \\ \mathbf{j} &= \mathbf{rot} \mathbf{h} && \text{en } \Omega_c^e.\end{aligned}$$

Para que el problema test sea adecuado, necesitamos que el campo \mathbf{e} tenga divergencia nula en el dieléctrico Ω_c^e y que cumpla las condiciones asintóticas (1.2.2). Además, para poder aplicar nuestro método necesitamos que $\text{soporte}(\mathbf{j}) \subset \Omega_c$. En otras palabras, debemos elegir el campo \mathbf{e} de modo que

$$\text{soporte}(\text{div} \mathbf{e}) \cup \text{soporte}\left(\mathbf{rot}\left(\frac{1}{\mu} \mathbf{rot} \mathbf{e}\right)\right) \subset \Omega_c,$$

y tal que

$$\mathbf{e}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{y} \quad \mathbf{rot} \mathbf{e}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty,$$

uniformemente en casi todas las direcciones $\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|}$, con $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$. En particular, es suficiente que \mathbf{e} tenga la forma

$$\mathbf{e} := \mathbf{rot} (f, f, f)^\top \quad \text{en } \mathbb{R}^3,$$

donde $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}$ es una función suficientemente regular con $\text{soporte}(f) \subset \Omega_c$.

3.4.2. Resultados numéricos

A continuación, mostramos algunos resultados numéricos que hemos obtenido para un problema test como el descrito en el Párrafo 3.4.1. Más concretamente, suponemos que el conductor ocupa la región $\Omega_c := (-1, 1)^3$ y que es homogéneo, con

$$\sigma(\mathbf{x}) = 1 \quad \text{y} \quad \mu(\mathbf{x}) = \mu_0 := 1 \quad \text{en } \Omega_c.$$

Tomamos $\omega := 1$ y

$$f(\mathbf{x}) := \begin{cases} (x_0^2 - x_1^2)^\alpha (x_0^2 - x_2^2)^\alpha (x_0^2 - x_3^2)^\alpha & \text{si } \mathbf{x} \in (-x_0, x_0)^3, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}$$

siendo $x_0 \in (0, 1)$ y $\alpha \in (3, +\infty)$ dos parámetros reales.

Para estudiar el orden de convergencia experimental del esquema numérico, hemos resuelto los problemas discretos correspondientes a diferentes mallas, refinadas sucesivamente. En particular, la Figura 3.2 representa la malla más grosera que hemos empleado.

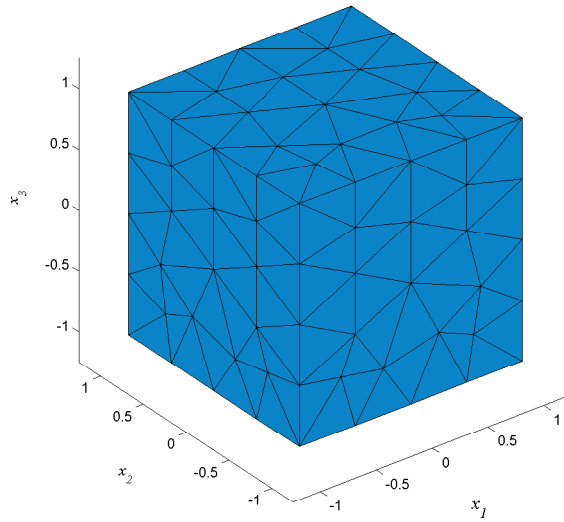


Figura 3.2: Malla más grosera

En la Tabla 3.1 presentamos los resultados obtenidos con nuestro método cuando $x_0 = 1$ y $\alpha = 4$. Más concretamente, identificamos cada malla con su

diámetro, que denotamos por h , y desglosamos el error total en las partes asociadas al campo magnético \mathbf{h} y al potencial λ . También presentamos el grado de convergencia experimental para el campo magnético, definido por

$$\epsilon = \frac{\log\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot},\Omega_c} - \log\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\tilde{h}}\|_{\mathbf{rot},\Omega_c}}{\log h - \log \tilde{h}},$$

donde h y \tilde{h} denotan los diámetros de dos mallas consecutivas.

h	$\ \mathbf{h} - \mathbf{h}_h\ _{\mathbf{rot},\Omega_c}$	$\ \lambda - \lambda_h\ _{0,\Sigma}$	ϵ
0.7733	34.8247	0.3136	—
0.5330	25.0762	0.1634	0.8825
0.2989	14.0539	0.0257	1.0010
0.2337	11.4203	0.0131	0.8433

Tabla 3.1: Resultados numéricos

Por otra parte, la Figura 3.3 representa el error correspondiente al campo magnético \mathbf{h} frente al diámetro h de la malla. Observamos que el error presenta una dependencia lineal con respecto a dicho diámetro h , lo cual coincide con lo previsto por el Teorema 3.2.8 ya que la solución es regular.

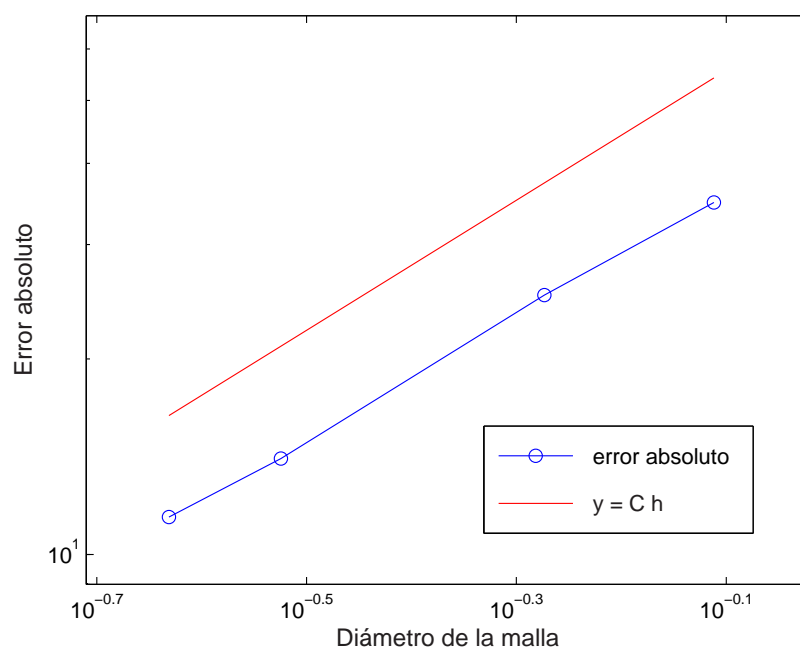


Figura 3.3: Error absoluto para \mathbf{h}_h en $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$ vs. h (escala logarítmica)

Capítulo 4

Eddy currents en conductores no simplemente conexos

En este capítulo, proponemos un método BEM–FEM mixto para el problema de *eddy currents* en régimen armónico (1.2.1–1.2.2) sin restricciones topológicas sobre el conductor.

Tal y como señalamos en la Nota 3.1.1, cuando seguimos el razonamiento del Capítulo 3 encontramos dificultades para representar el campo magnético \mathbf{h} en el dieléctrico Ω_c^e . En efecto, esta representación involucra campos vectoriales de Neumann armónicos y, en consecuencia, el correspondiente método numérico es difícil de implementar y computacionalmente costoso; cf. [41].

Para evitar estas dificultades, seguimos la estrategia de [5] y reformulamos el problema de *eddy currents* como un problema mixto. Al mismo tiempo, esta estrategia nos permite estudiar aquellas situaciones en las que el soporte de la densidad de corriente \mathbf{j} atraviesa la frontera Σ .

En primer lugar introducimos un *dominio computacional* Ω conexo y simplemente conexo, tal que

$$\overline{\Omega}_c \subset \Omega \quad \text{y} \quad \text{soporte}(\mathbf{j}) \subset \overline{\Omega}. \quad (4.0.1)$$

Además, tomamos Ω con frontera $\Gamma := \partial\Omega$ conexa, simplemente conexa y Lips-

chitz continua.

Subdividimos el dieléctrico Ω_c^e en el dominio acotado $\Omega_d := \Omega \setminus \overline{\Omega}_c$ y la región no acotada $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$; véase la Figura 4.1 a continuación.

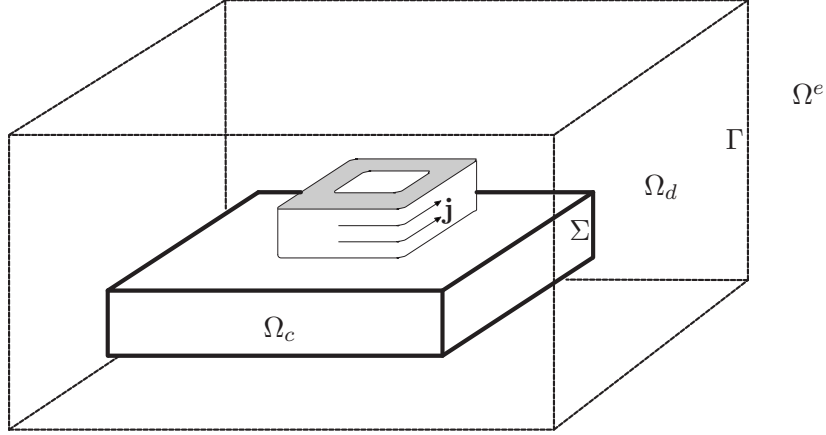


Figura 4.1: Geometría del problema

Consideramos los operadores de trazas tangenciales

$$\gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{ext} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_d) \rightarrow \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\text{div}_{\Sigma}, \Sigma) \quad \text{y} \quad \gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{int} : \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c) \rightarrow \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\text{div}_{\Sigma}, \Sigma)$$

tomados desde Ω_d y Ω_c , respectivamente. Además, denotamos por

$$(\gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{ext})^{-1} : \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\text{div}_{\Sigma}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_d) \quad \text{y} \quad (\gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{int})^{-1} : \mathbf{H}_{\times}^{-1/2}(\text{div}_{\Sigma}, \Sigma) \rightarrow \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c)$$

dos operadores continuos que sean inversas a derecha de $\gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{ext}$ y $\gamma_{\boldsymbol{\tau}}^{int}$, respectivamente; véase el Teorema 2.5.2.

4.1. Espacios funcionales auxiliares

Definimos el espacio

$$\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3) := \{\mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3); \mathbf{rot} \mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)\},$$

que es de Hilbert con la norma del grafo

$$\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot},\mathbb{R}^3} := \left(\|\mathbf{q}\|_{0,\mathbb{R}^3}^2 + \|\mathbf{rot}\ \mathbf{q}\|_{0,\mathbb{R}^3}^2 \right)^{1/2}.$$

Introducimos los espacios

$$\mathbf{X}(\mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3); \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \text{ y } \mathbf{rot}\ \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega^e \},$$

$$\mathbf{U}(\mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3); \operatorname{div} \mathbf{q} = 0 \text{ y } \mathbf{rot}\ \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega^e \},$$

así como sus subespacios

$$\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3); \mathbf{rot}\ \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_d \},$$

$$\mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{U}(\mathbb{R}^3); \mathbf{rot}\ \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_c^e \}.$$

Observemos que $\mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ son subespacios cerrados de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3)$ y, por lo tanto, son espacios de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{\mathbf{rot},\mathbb{R}^3}$. Análogamente, $\mathbf{U}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3)$ son subespacios cerrados de $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ y, en consecuencia, son espacios de Hilbert con la norma $\|\cdot\|_{0,\mathbb{R}^3}$.

Lema 4.1.1. *El espacio $\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ es denso en $\mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3)$.*

Demostración. Sea $\mathbf{q} \in \mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3)$. Entonces $\mathbf{q}|_{\Omega_d} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_d)$ y podemos definir

$$\mathbf{p} := (\gamma_{\tau}^{int})^{-1}(\gamma_{\tau}^{ext} \mathbf{q}|_{\Omega_d}) \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega_c).$$

Consideramos la descomposición $\mathbf{q} = \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2$, donde

$$\mathbf{q}_1 := \begin{cases} \mathbf{p} & \text{en } \Omega_c \\ \mathbf{q}|_{\Omega_c^e} & \text{en } \Omega_c^e \end{cases} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3),$$

$$\mathbf{q}_2 := \begin{cases} \mathbf{q}|_{\Omega_c} - \mathbf{p} & \text{en } \Omega_c \\ \mathbf{0} & \text{en } \Omega_c^e \end{cases} \in \mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3).$$

Como $\mathcal{D}(\Omega_c)$ es denso en $\mathbf{L}^2(\Omega_c)$, existe una sucesión $(\mathbf{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}(\Omega_c)$ tal que $\mathbf{u}_n \rightarrow \mathbf{q}_2|_{\Omega_c}$ en $\mathbf{L}^2(\Omega_c)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, denotamos por $\tilde{\mathbf{u}}_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ la extensión de \mathbf{u}_n por cero a todo el espacio. Entonces la sucesión $(\mathbf{q}_1 + \tilde{\mathbf{u}}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ converge a \mathbf{q} en $\mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ y concluimos el resultado. ■

El resultado anterior nos permite introducir $\mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3)$ como el espacio dual de $\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ con espacio pivote $\mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3)$. De esta forma, las siguientes inclusiones son continuas y densas:

$$\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3) \hookrightarrow \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3).$$

Nota 4.1.1 Recordemos que, según la primera condición de compatibilidad de (1.2.3), $\operatorname{div} \mathbf{j} = 0$ en Ω_c^e . En particular, $\mathbf{j}|_{\Omega_c^e} \in \mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_c^e)$ y por lo tanto el Teorema 2.3.3 garantiza que

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{j}_d) = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{j}|_{\Omega_c^e}) = 0 \quad \text{sobre } \Gamma,$$

donde denotamos $\mathbf{j}_d := \mathbf{j}|_{\Omega_d}$.

La Nota anterior y las condiciones de compatibilidad (1.2.3) sugieren definir el siguiente subespacio cerrado de $\mathbf{H}(\operatorname{div}, \Omega_d)$:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\Omega_d) := \{ \mathbf{m} \in \mathbf{L}^2(\Omega_d); \operatorname{div} \mathbf{m} = 0 \text{ en } \Omega_d, \\ \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{m} = 0 \text{ sobre } \Gamma, \langle \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{m}, \mathbf{1} \rangle_{\Sigma_j} = 0 \forall j = 1, \dots, N_{\Sigma} \}. \end{aligned}$$

También definimos el espacio

$$\mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3); \operatorname{div} \mathbf{q} \in L^2(\mathbb{R}^3) \},$$

que es de Hilbert con la norma del grafo

$$\|\mathbf{q}\|_{\operatorname{div}, \mathbb{R}^3} := \left(\|\mathbf{q}\|_{0, \mathbb{R}^3}^2 + \|\operatorname{div} \mathbf{q}\|_{0, \mathbb{R}^3}^2 \right)^{1/2}.$$

Consideramos el operador de extensión $\mathcal{E} : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ dado por

$$\mathcal{E} \mathbf{m}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \nabla \rho(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ \mathbf{m}(\mathbf{x}) & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_d, \\ \mathbf{0} & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega^e, \end{cases}$$

donde $\rho \in H^1(\Omega_c) \cap L_0^2(\Omega_c)$ es armónica y se caracteriza de forma única por la condición de contorno

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = \gamma_{\mathbf{n}}^{ext} \mathbf{m} \quad \text{sobre } \Sigma.$$

Lema 4.1.2. *El operador lineal $\mathcal{E} : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ está acotado y satisface*

$$\text{div}(\mathcal{E}\mathbf{m}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3,$$

para cada $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$.

Demostración. Por definición, la función $\mathcal{E}\mathbf{m} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ cumple

$$\text{div}(\mathcal{E}\mathbf{m}) = 0 \quad \text{en } \Omega^e \cup \Omega_d \cup \Omega_c,$$

y además

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathcal{E}\mathbf{m}|_{\Omega_c}) = \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} = \gamma_{\mathbf{n}}^{ext} \mathbf{m} = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathcal{E}\mathbf{m}|_{\Omega_d}) \quad \text{sobre } \Sigma,$$

$$\gamma_{\mathbf{n}}(\mathcal{E}\mathbf{m}|_{\Omega_d}) = \gamma_{\mathbf{n}} \mathbf{m} = 0 = \gamma_{\mathbf{n}}(\mathcal{E}\mathbf{m}|_{\Omega^e}) \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Entonces el Corolario 2.3.3 garantiza que $\mathcal{E}\mathbf{m} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ y que

$$\text{div}(\mathcal{E}\mathbf{m}) = 0 \quad \text{en } \mathbb{R}^3.$$

Por otro lado, utilizando el lema de Lax–Milgram, sabemos que el problema

$$\begin{cases} \text{hallar } \varphi \in H^1(\Omega_c) \cap L_0^2(\Omega_c) & \text{t.q.} \\ (\nabla \varphi, \nabla \psi)_{0, \Omega_c} = \langle \eta, \gamma \psi \rangle_{1/2, \Sigma} & \forall \psi \in H^1(\Omega_c) \cap L_0^2(\Omega_c), \end{cases}$$

está bien planteado para cada $\eta \in H^{-1/2}(\Sigma)$. Nótese que $\rho \in H^1(\Omega_c) \cap L_0^2(\Omega_c)$ es la solución de este problema para $\eta := \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} \in H^{-1/2}(\Sigma)$. Luego

$$\|\rho\|_{1, \Omega_c} \leq C_1 \left\| \frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{n}} \right\|_{-1/2, \Sigma} = C_1 \|\gamma_{\mathbf{n}}^{ext} \mathbf{m}\|_{-1/2, \Sigma}.$$

Como el operador lineal $\gamma_{\mathbf{n}}^{ext} : \mathbf{H}(\text{div}, \Omega_d) \rightarrow H^{-1/2}(\Sigma)$ está acotado y además $\text{div } \mathbf{m} = 0$ en Ω_d , deducimos que

$$\|\rho\|_{1, \Omega_c} \leq C_2 \|\mathbf{m}\|_{\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_d)} = C_2 \|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}.$$

Así concluimos que $\mathcal{E}\mathbf{m} \in \mathbf{H}(\text{div}, \mathbb{R}^3)$ tiene divergencia nula en \mathbb{R}^3 y cumple

$$\|\mathcal{E}\mathbf{m}\|_{\text{div}, \mathbb{R}^3}^2 = \|\nabla \rho\|_{0, \Omega_c}^2 + \|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}^2 \leq (C_2^2 + 1) \|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}^2. \quad (4.1.1)$$

■

Lema 4.1.3. *El operador lineal $\mathcal{M} : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$, definido por*

$$\mathcal{M}\mathbf{m}(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi} \operatorname{rot} \left(\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y} \right),$$

es continuo y además $\operatorname{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = \mathbf{m}$ en Ω_d para cada $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$.

Demostración. En primer lugar, señalamos que la función $\Phi(\mathbf{x}) := \frac{1}{4\pi|\mathbf{x}|}$ es localmente integrable en \mathbb{R}^3 y que el soporte de $\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ es compacto. Estas propiedades nos permiten introducir la distribución $\mathcal{M}\mathbf{m} := \operatorname{rot} \mathbf{u}$, donde \mathbf{u} denota la convolución

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) := (\Phi * \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m})(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|} d\mathbf{y}.$$

Así definida, la distribución \mathbf{u} satisface

$$-\Delta \mathbf{u} = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m} \quad \text{en } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3); \quad (4.1.2)$$

al respecto, puede consultarse [56, Párrafo VI.3].

Sea \mathcal{O} un dominio acotado tal que $\bar{\Omega} \subset \mathcal{O}$. Entonces $\mathbf{u}|_{\mathcal{O}} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ con

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}} \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}\|_{0,\mathbb{R}^3} < \infty. \quad (4.1.3)$$

En efecto, utilizando la desigualdad de Cauchy–Swartz,

$$|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 \leq \left(\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \left(\int_{\Omega} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) |\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \right) \quad \text{en c.t.p. } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3;$$

luego, por el criterio de mayoración, $\mathbf{u}|_{\mathcal{O}} \in \mathbf{L}^2(\mathcal{O})$ con

$$\|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}}^2 \leq \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} \right) \int_{\Omega} \left(\int_{\mathcal{O}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{x} \right) |\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}$$

y obtenemos la propiedad (4.1.3).

Ahora, en virtud de las propiedades (4.1.2) y (4.1.3), podemos aplicar [35, Teorema 6.4] y deducir así que $\varphi \mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\mathcal{O})$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{O})$. En particular, $\mathbf{u}|_{\Omega} \in \mathbf{H}^2(\Omega)$ con

$$\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C (\|\mathbf{u}\|_{0,\mathcal{O}} + \|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}\|_{0,\mathcal{O}}) \leq C \left(\sup_{\mathbf{x} \in \mathcal{O}} \int_{\mathcal{O}} \Phi(\mathbf{x} - \mathbf{y}) d\mathbf{y} + 1 \right) \|\boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}\|_{0,\mathbb{R}^3}.$$

Entonces, utilizando la propiedad (4.1.1),

$$\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{1,\Omega} \leq \|\mathbf{u}\|_{2,\Omega} \leq C_1 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}. \quad (4.1.4)$$

Por otro lado, tenemos que $\operatorname{div} \mathbf{u} = \Phi_*(\operatorname{div} \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m}) = 0$ en \mathbb{R}^3 ; así que, aplicando la tercera identidad de (2.0.1),

$$\operatorname{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = -\Delta \mathbf{u} + \nabla(\operatorname{div} \mathbf{u}) = \boldsymbol{\varepsilon}\mathbf{m} \quad \text{en } \mathbb{R}^3. \quad (4.1.5)$$

En particular, se cumple la propiedad del enunciado:

$$\operatorname{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = \mathbf{m} \quad \text{en } \Omega_d.$$

También tenemos, en virtud de (4.1.5), que $\operatorname{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = \mathbf{0}$ en Ω^e . Luego el Teorema 2.7.3 garantiza que $(\mathcal{M}\mathbf{m})|_{\Omega^e} = \nabla\psi$ para un potencial $\psi \in W^1(\Omega^e)$. Como $\operatorname{div}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = 0$ en Ω^e , deducimos que la función $\psi \in W^1(\Omega^e)$ es armónica y es la solución del problema variacional

$$\begin{cases} \text{hallar } \psi \in W^1(\Omega^e) \quad \text{tal que} \\ \int_{\Omega^e} \nabla\psi \cdot \nabla\varphi \, d\mathbf{x} = \langle \gamma_n(\operatorname{rot} \mathbf{u}), \gamma\varphi \rangle_{1/2,\Gamma} \quad \forall \varphi \in W^1(\Omega^e). \end{cases}$$

En virtud del Lema de Lax–Milgram, este problema está bien planteado y, en consecuencia,

$$\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{0,\Omega^e} = \|\nabla\psi\|_{0,\Omega^e} \leq C_2 \|\gamma_n(\operatorname{rot} \mathbf{u})\|_{-1/2,\Gamma}.$$

Utilizando la Proposición 2.3.2 junto con la propiedad (4.1.4), resulta que

$$\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{0,\Omega^e} \leq C_3 \|\operatorname{rot} \mathbf{u}\|_{0,\Omega} \leq C_4 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}. \quad (4.1.6)$$

Teniendo en cuenta que $\operatorname{div}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = 0$ en \mathbb{R}^3 y aplicando los resultados (4.1.4), (4.1.5) y (4.1.6), deducimos que $\mathcal{M}\mathbf{m} \in \mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ con

$$\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{\operatorname{rot},\mathbb{R}^3} + \|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{\operatorname{div},\mathbb{R}^3} \leq C_5 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}.$$

En [29, Nota 2.6] se demuestra que el espacio $\mathbf{H}(\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}(\operatorname{div}, \mathbb{R}^3)$ se incluye con continuidad en $\mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$. Por lo tanto, $\mathcal{M}\mathbf{m} \in \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ con

$$\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{1,\mathbb{R}^3} \leq C_6 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}$$

y concluimos que el operador $\mathcal{M} : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ está acotado. ■

4.2. Formulación variacional

En este apartado deducimos una formulación variacional del problema (1.2.1–1.2.2). Más concretamente, primero obtenemos una formulación variacional en términos del campo magnético en todo el espacio \mathbb{R}^3 . A continuación, introducimos un multiplicador de Lagrange para imponer la condición asociada al rotacional del campo magnético en el dieléctrico. Finalmente, introducimos una variable auxiliar sobre la frontera Γ y así podemos reformular el problema en el dominio acotado Ω .

4.2.1. Una formulación variacional global

Comenzamos estudiando el espacio funcional adecuado para buscar el campo magnético \mathbf{h} . Con este fin, notamos que, según la primera ecuación de (1.2.1),

$$\mathbf{rot} \mathbf{h} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega^e.$$

Además, aplicando el operador divergencia en la segunda ecuación de (1.2.1),

$$\operatorname{div} \mathbf{h} = 0 \quad \text{en } \Omega^e.$$

Partiendo de estas dos ecuaciones junto con la condición asintótica (1.2.2), y utilizando la tercera identidad de (2.0.1), deducimos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathbf{h} = \mathbf{0} & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus B_R, \\ \operatorname{div} \mathbf{h} = 0 & \text{en } \mathbb{R}^3 \setminus B_R, \\ \mathbf{h}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) & \text{uniformemente cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

donde B_R representa una bola centrada en el origen con radio R suficientemente grande. En [6, Proposición 3.1] se hace un desarrollo del campo \mathbf{h} en polinomios esféricos armónicos para mostrar que, bajo las condiciones anteriores,

$$\mathbf{h}(\mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{uniformemente cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

En particular, tenemos que $\mathbf{h} \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$. Esta propiedad, junto con la primera ecuación de (1.2.1) y el Lema 4.1.3, sugiere buscar el campo \mathbf{h} en el espacio afín $\mathcal{M}\mathbf{j}_d + \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$.

Para buscar una formulación variacional del problema (1.2.1–1.2.2), tomamos el producto escalar de la segunda ecuación de (1.2.1) por una función genérica $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$, integramos en el dominio Ω y usamos la fórmula de Green (2.3.3):

$$i\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + (\mathbf{e}, \mathbf{rot} \mathbf{q})_{0, \Omega_c} = 0. \quad (4.2.1)$$

La primera ecuación de (1.2.1) y la hipótesis (1.1.6) garantizan que

$$\mathbf{e} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{rot} \mathbf{h} - \mathbf{j}_c) \quad \text{en } \Omega_c,$$

siendo $\mathbf{j}_c := \mathbf{j}|_{\Omega_c}$. Así que podemos eliminar el campo eléctrico de (4.2.1) y obtenemos

$$i\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3),$$

donde

$$c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{rot} \mathbf{q}_1, \mathbf{rot} \mathbf{q}_2\right)_{0, \Omega_c} \quad \text{y} \quad l(\mathbf{q}) := \left(\frac{1}{\sigma} \mathbf{j}_c, \mathbf{rot} \mathbf{q}\right)_{0, \Omega_c},$$

para cualesquiera $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$.

Por lo tanto, proponemos la siguiente formulación débil del problema (1.2.1) en términos del campo magnético.

Problema 4.2.1 Buscar $\mathbf{h} \in \mathcal{M}\mathbf{j}_d + \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ tal que

$$i\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3).$$

Teorema 4.2.1. Si $\mathbf{j}_d \in \mathbf{M}(\Omega_d)$, entonces el Problema 4.2.1 está bien planteado.

Demostración. En términos de la variable auxiliar $\mathbf{h}^* := \mathbf{h} - \mathcal{M}\mathbf{j}_d \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$, el problema 4.2.1 es equivalente a

$$\begin{cases} \text{buscar } \mathbf{h}^* \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \text{ tal que} \\ i\omega(\mu\mathbf{h}^*, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(\mathbf{h}^*, \mathbf{q}) = l^*(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3). \end{cases} \quad (4.2.2)$$

Aquí, el operador $l^* : \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbb{C}$ se define como

$$l^*(\mathbf{q}) := l(\mathbf{q}) - i\omega (\mu \mathcal{M} \mathbf{j}_d, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} - c(\mathcal{M} \mathbf{j}_d, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3).$$

Nótese que la siguiente forma sesquilineal es elíptica:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{C} \\ (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &\mapsto (1+i) \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \right)_{0, \mathbb{R}^3} + \frac{1-i}{\omega \mu_0} c(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2). \end{aligned}$$

En efecto, razonando como en la demostración del Teorema 3.1.3, deducimos que

$$\operatorname{Re} \left[\frac{1-i}{\omega \mu_0} (i\omega (\mu \widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{q}})_{0, \mathbb{R}^3} + c(\mathbf{q}, \mathbf{q})) \right] \geq \alpha \|\mathbf{q}\|_{\operatorname{rot}, \mathbb{R}^3}^2 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3),$$

donde

$$\alpha := \min \left\{ 1, \frac{1}{\omega \mu_0 \sigma_1} \right\} > 0.$$

En consecuencia, podemos reescalar el problema (4.2.2) de modo que esté bajo las hipótesis del Lema de Lax–Milgram. Como este problema es equivalente al Problema 4.2.1, concluimos el resultado. \blacksquare

4.2.2. Una formulación variacional mixta

En este apartado imponemos la condición $\operatorname{rot} \mathbf{h}|_{\Omega_d} = \mathbf{j}_d$ introduciendo un multiplicador de Lagrange. Con este fin, definimos la forma sesquilineal

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{q}) := (\mathbf{m}, \operatorname{rot} \mathbf{q})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Sea $\Upsilon : \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{M}'(\Omega_d)$ el operador lineal caracterizado por

$$\langle \Upsilon \mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle_{\mathbf{M}'(\Omega_d) \times \mathbf{M}(\Omega_d)} := d(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{q}}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d),$$

donde $\mathbf{M}'(\Omega_d)$ representa el espacio dual de $\mathbf{M}(\Omega_d)$ con espacio pivote $\mathbf{L}^2(\Omega_d)$.

Nótese que este operador está acotado; en efecto, basta observar que

$$\|\Upsilon \mathbf{q}\|_{\mathbf{M}'(\Omega_d)} = \sup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d), \mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{|d(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{q}})|}{\|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}} \leq \|\operatorname{rot} \mathbf{q}\|_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3).$$

Denotamos por $\Upsilon^* : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3)$ el operador dual de Υ :

$$\langle \Upsilon^* \mathbf{m}, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} = d(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{q}}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Lema 4.2.2. *El operador lineal $\Upsilon^* : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)^0$ es un isomorfismo, siendo*

$$\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)^0 := \{ \ell \in \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3); \langle \ell, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} = 0 \ \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \}.$$

Demostración. En virtud del Lema 4.1.3,

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{q} \neq 0} \frac{|d(\mathbf{m}, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot}, \mathbb{R}^3}} \geq \frac{|d(\mathbf{m}, \mathcal{M}\mathbf{m})|}{\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{\text{rot}, \mathbb{R}^3}} = \frac{\|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}^2}{\|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{\text{rot}, \mathbb{R}^3}} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Entonces, utilizando que el operador $\mathcal{M} : \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3)$ está acotado, resulta que

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{q} \neq 0} \frac{|d(\mathbf{m}, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot}, \mathbb{R}^3}} \geq \frac{1}{\|\mathcal{M}\|} \|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Además, la inclusión

$$\{ \text{rot } \mathbf{q}|_{\Omega_d}; \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \} \subset \mathbf{M}(\Omega_d)$$

garantiza que $\mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ es el núcleo del operador $\Upsilon : \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{M}'(\Omega_d)$.

Por lo tanto, el resultado es consecuencia de [29, Lema 4.1]. ■

Problema 4.2.2 Buscar $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ y $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ tales que

$$\begin{aligned} i\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) &= l(\mathbf{q}) & \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \\ \overline{d(\mathbf{m}, \mathbf{h})} &= (\mathbf{j}_d, \mathbf{m})_{0, \Omega_d} & \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d). \end{aligned}$$

Teorema 4.2.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.1, el Problema 4.2.2 tiene una única solución $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. Además, \mathbf{h} pertenece al espacio afín $\mathcal{M}\mathbf{j}_d + \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ y es la única solución del Problema 4.2.1.*

Demostración. La segunda ecuación del Problema 4.2.2 significa que $\text{rot } \mathbf{h} = \mathbf{j}_d$ en Ω_d , es decir, $\mathbf{h} \in \mathcal{M}\mathbf{j}_d + \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$. Luego, testeando la primera ecuación de 4.2.2 con funciones $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$, deducimos que \mathbf{h} coincide con la única solución del

Problema 4.2.1. Así que el resultado se reduce a mostrar la existencia y unicidad de un multiplicador $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ tal que

$$d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) - \iota\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} - c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3). \quad (4.2.3)$$

Para ello, introducimos el funcional $\mathcal{G} \in \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3)$ definido por

$$\langle \mathcal{G}, \bar{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} := l(\mathbf{q}) - \iota\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} - c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3).$$

Como \mathbf{h} es la solución del Problema 4.2.1, sabemos que $\langle \mathcal{G}, \bar{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} = 0$ para cada $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$. Es decir $\mathcal{G} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)^0$ y, por tanto, el Lema 4.2.2 garantiza que la ecuación

$$\Upsilon^* \mathbf{r} = \mathcal{G}$$

tiene una única solución $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. Ahora concluimos notando que esta última ecuación es equivalente a (4.2.3). \blacksquare

4.2.3. Una formulación variacional BEM–FEM

Dado un vector $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$, el Lema 2.7.2 garantiza que podemos representarlo en el dominio exterior como

$$\mathbf{q} = \nabla \varphi \quad \text{en } \Omega^e, \quad (4.2.4)$$

para un único potencial armónico $\varphi \in W^1(\Omega^e)$. En particular, como φ es armónico en Ω^e , admite una representación integral de la forma (2.7.2) y cumple las ecuaciones integrales (2.7.8).

Definimos

$$\mathbf{X}(\Omega) := \left\{ \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega); \gamma_{\mathbf{n}}(\mathbf{rot} \mathbf{q}) = 0 \text{ en } H^{-1/2}(\Gamma) \right\},$$

que es un subespacio cerrado de $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$; véase la Proposición 3.1.2. Además, razonando como en el Párrafo 3.1.2, tenemos que

$$\mathbf{rot}_\Gamma : H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C} \rightarrow \gamma_\tau \mathbf{X}(\Omega) \quad (4.2.5)$$

es un isomorfismo y que el operador lineal

$$\mathcal{B} := \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \circ \mathbf{rot}_\Gamma^{-1} \circ \gamma_\tau : \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)/\mathbb{C}$$

está acotado; también tenemos la siguiente estimación análoga a (3.1.10):

$$\|\mathcal{B}\mathbf{q}\|_{1/2,\Gamma} \leq C \|\gamma_\tau \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega). \quad (4.2.6)$$

Introducimos el espacio $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega) := \mathbf{X}(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma)$ y las formas sesquilineales

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &:= i\omega(\mu\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_{0,\Omega} + i\omega\mu_0 \overline{\langle \gamma_\tau \mathbf{q}_2, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{q}_1) \rangle}_{\tau,\Gamma}, \\ a(\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2) &:= a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + i\omega\mu_0 \left(\overline{\langle \eta_2, \mathcal{V}\eta_1 \rangle}_{1/2,\Gamma} + \overline{\langle \eta_2, \mathcal{B}\mathbf{q}_1 \rangle}_{1/2,\Gamma} - \langle \eta_1, \mathcal{B}\mathbf{q}_2 \rangle_{1/2,\Gamma} \right), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\widehat{\mathbf{q}}_1 := (\mathbf{q}_1, \eta_1)$ y $\widehat{\mathbf{q}}_2 := (\mathbf{q}_2, \eta_2)$ en $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$. Nótese que, bajo la hipótesis (1.1.5) sobre el coeficiente μ , los Teoremas 2.7.5 y 2.7.6 y la propiedad (4.2.6) garantizan que

$$\begin{aligned} |a(\widehat{\mathbf{q}}_1, \widehat{\mathbf{q}}_2)| &\leq C_1 \left(\|\mathbf{q}_1\|_{0,\Omega} \|\mathbf{q}_2\|_{0,\Omega} + \|\gamma_\tau \mathbf{q}_1\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_2\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \right. \\ &\quad + \|\eta_1\|_{-1/2,\Gamma} \|\eta_2\|_{-1/2,\Gamma} + \|\eta_2\|_{-1/2,\Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_1\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad \left. + \|\eta_1\|_{-1/2,\Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_2\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \right), \quad (4.2.7) \end{aligned}$$

y que además $a(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ con

$$a(\widehat{\mathbf{q}}, \widehat{\mathbf{q}}) \geq C_2 \left(\|\mathbf{q}\|_{0,\Omega}^2 + \|\gamma_\tau \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\eta\|_{-1/2,\Gamma}^2 \right), \quad (4.2.8)$$

para cualesquiera $\widehat{\mathbf{q}}_1 := (\mathbf{q}_1, \eta_1)$, $\widehat{\mathbf{q}}_2 := (\mathbf{q}_2, \eta_2)$ y $\widehat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}, \eta)$ en $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$.

Proponemos la siguiente formulación variacional del problema (1.2.1–1.2.2).

Problema 4.2.3 Buscar $\widehat{\mathbf{h}} := (\mathbf{h}, \lambda) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$ y $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ tales que

$$\begin{aligned} a(\widehat{\mathbf{h}}, \widehat{\mathbf{q}}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) &= l(\mathbf{q}) & \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega), \\ \overline{d(\mathbf{m}, \mathbf{h})} &= (\mathbf{j}_d, \mathbf{m})_{0,\Omega_d} & \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d). \end{aligned}$$

A continuación damos un resultado auxiliar que nos permitirá analizar el Problema 4.2.3 y relacionarlo con el Problema 4.2.2.

Proposición 4.2.4. *El siguiente operador de restricción define un isomorfismo:*

$$\begin{aligned} \mathcal{R} : \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbf{X}(\Omega) \\ \mathbf{q} &\mapsto \mathcal{R}\mathbf{q} := \mathbf{q}|_{\Omega}. \end{aligned}$$

Demostración. Claramente $\mathcal{R} : \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{X}(\Omega)$ es un operador lineal continuo.

Para mostrar que \mathcal{R} es inyectivo, consideramos $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ con $\mathcal{R}\mathbf{q} = \mathbf{0}$; es decir, $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ en Ω . Sea $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ el potencial armónico asociado a \mathbf{q} como en (4.2.4). Nótese que, por la propia definición del operador \mathbf{rot}_{Γ} ,

$$\mathbf{rot}_{\Gamma} \varphi = \gamma_{\tau}(\nabla \varphi) = \gamma_{\tau} \mathbf{q} = \mathbf{0}.$$

Luego el Teorema 2.6.3 garantiza que la traza de φ es constante sobre Γ . Ahora, como la función $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ es armónica y su traza es constante sobre Γ , deducimos que $\varphi = 0$ en Ω^e . Por lo tanto, \mathbf{q} se anula en todo \mathbb{R}^3 .

Para mostrar que \mathcal{R} es suprayectivo, tomamos $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$. Como (4.2.5) define un isomorfismo, existe un potencial $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ con $\mathbf{rot}_{\Gamma} \eta = \gamma_{\tau} \mathbf{q}$ y este potencial es único salvo constante aditiva. Sea $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ la única función armónica en Ω^e cuya traza coincide con η sobre Γ salvo constante aditiva. Definimos

$$\mathbf{p} := \begin{cases} \mathbf{q} & \text{en } \Omega, \\ \nabla \varphi & \text{en } \Omega^e, \end{cases}$$

que cumple

$$\gamma_{\tau}^{int} \mathbf{p} = \gamma_{\tau}^{int} \mathbf{q} = \mathbf{rot}_{\Gamma} \eta = \gamma_{\tau}^{ext} \mathbf{p} \quad \text{sobre } \Gamma.$$

Entonces el Teorema 2.3.6 garantiza que $\mathbf{p} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$, con $\mathcal{R}\mathbf{p} = \mathbf{q}$.

Ahora podemos aplicar el teorema del grafo cerrado y así concluimos que $\mathcal{R} : \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \rightarrow \mathbf{X}(\Omega)$ es un isomorfismo. ■

Teorema 4.2.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.2.1, el Problema 4.2.3 tiene una única solución $\widehat{\mathbf{h}} \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. Además, se relaciona con la solución \mathbf{h} del Problema 4.2.2 según $\widehat{\mathbf{h}} = (\mathcal{R}\mathbf{h}, \gamma_{\mathbf{n}}^{ext}\mathbf{h})$ y el multiplicador de Lagrange es el mismo para ambos problemas.*

Demostración. Sea $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ la solución del Problema 4.2.2. Entonces $\widehat{\mathbf{h}}^* = (\mathbf{h}^*, \lambda) := (\mathcal{R}\mathbf{h}, \gamma_{\mathbf{n}}^{ext}\mathbf{h}) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ es una solución del Problema 4.2.3:

Es claro que $\widehat{\mathbf{h}}^* \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$ satisface la segunda ecuación del Problema 4.2.3, así que estudiamos si también satisface la primera ecuación. Para ello, consideramos una función genérica $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ y denotamos por $\psi, \varphi \in W^1(\Omega^e)$ los potenciales armónicos asociados a los campos $\mathbf{h}, \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ vía (4.2.4). Teniendo en cuenta la definición de \mathbf{rot}_{Γ} y la continuidad de la traza tangencial a través de Γ ,

$$\gamma_{\tau}\mathbf{h}^* = \mathbf{rot}_{\Gamma}\psi \quad \text{y} \quad \gamma_{\tau}\mathbf{q} = \mathbf{rot}_{\Gamma}\varphi. \quad (4.2.9)$$

Definimos $\lambda := \gamma_{\mathbf{n}}^{ext}\mathbf{h} = \frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}$. Entonces, utilizando las ecuaciones integrales (2.7.8) para el potencial armónico ψ y recordando la definición del operador \mathcal{B} ,

$$\mathcal{V}\lambda + \mathcal{B}\mathbf{h}^* = 0 \quad \text{y} \quad \lambda = -\mathcal{N}\gamma\psi + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*\right)\lambda \quad \text{sobre } \Gamma. \quad (4.2.10)$$

A continuación aplicamos la fórmula de Green (2.3.1) en

$$(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu\mathbf{h}^*, \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 (\nabla\psi, \nabla\varphi)_{0, \Omega^e},$$

de modo que

$$(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu\mathbf{h}^*, \mathbf{q})_{0, \Omega} - \mu_0 \langle \lambda, \varphi \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Combinando esta ecuación con la segunda de (4.2.10) y con (2.7.7),

$$(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu\mathbf{h}^*, \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 \overline{\langle \mathbf{rot}_{\Gamma}\varphi, \mathcal{V}_{\tau}(\mathbf{rot}_{\Gamma}\psi) \rangle}_{\tau, \Gamma} - \mu_0 \langle \lambda, \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma\varphi \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Utilizando (4.2.9) junto con la definición del operador \mathcal{B} , deducimos que

$$(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu\mathbf{h}^*, \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 \overline{\langle \gamma_{\tau}\mathbf{q}, \mathcal{V}_{\tau}(\gamma_{\tau}\mathbf{h}^*) \rangle}_{\tau, \Gamma} - \mu_0 \langle \lambda, \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Luego, usando la primera identidad de (4.2.10),

$$\iota\omega(\mu\mathbf{h}, \mathcal{R}^{-1}\mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = a(\widehat{\mathbf{h}}^*, \widehat{\mathbf{q}}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega).$$

En consecuencia, la primera ecuación del Problema 4.2.2 garantiza que

$$a(\widehat{\mathbf{h}}^*, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{h}^*, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega),$$

que es la primera ecuación del Problema 4.2.3.

Por lo tanto, $\widehat{\mathbf{h}}^* \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ es una solución del Problema 4.2.3.

Para demostrar la unicidad de solución del Problema 4.2.3, consideramos $\widehat{\mathbf{h}} = (\mathbf{h}, \lambda) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ que sea solución del Problema 4.2.3 homogéneo. Testeando la primera ecuación del Problema 4.2.3 homogéneo con funciones de la forma $\widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{0}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, deducimos que

$$\lambda = -\mathcal{V}^{-1}(\mathcal{B}\mathbf{h}). \quad (4.2.11)$$

Testeando nuevamente la primera ecuación del Problema 4.2.3 homogéneo con funciones de la forma $\widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, 0) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$ y substituyendo λ por la expresión (4.2.11),

$$\begin{aligned} \iota\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \Omega} + \iota\omega\mu_0\langle \gamma_\tau\mathbf{q}, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau\mathbf{h}) \rangle_{\tau, \Gamma} + \iota\omega\mu_0\langle \mathcal{V}^{-1}(\mathcal{B}\mathbf{h}), \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} \\ + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega). \end{aligned}$$

Razonando como en la demostración de la Proposición 4.2.4, podemos asociar al campo $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\Omega)$ un único potencial armónico $\psi \in W^1(\Omega^e)$ caracterizado por la condición $\mathbf{rot}_\Gamma(\gamma\psi) = \gamma_\tau\mathbf{h}$. Análogamente, podemos asociar a cada función $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$ un único potencial armónico $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ tal que $\mathbf{rot}_\Gamma(\gamma\varphi) = \gamma_\tau\mathbf{q}$. Como ψ es armónico, cumple las ecuaciones integrales (2.7.8) y por tanto la última ecuación es equivalente a

$$\begin{aligned} \iota\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0, \Omega} + \iota\omega\mu_0\langle \mathcal{N}\gamma\psi, \gamma\varphi \rangle_{1/2, \Gamma} - \iota\omega\mu_0\langle (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*)\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}, \gamma\varphi \rangle_{1/2, \Gamma} \\ + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega). \end{aligned}$$

Aplicando nuevamente que ψ satisface (2.7.8) e integrando por partes,

$$i\omega(\mu\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0,\Omega} + i\omega\mu_0(\nabla\psi, \nabla\varphi)_{0,\Omega^e} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega).$$

Es decir,

$$i\omega(\mu\mathcal{R}^{-1}\mathbf{h}, \mathbf{q})_{0,\mathbb{R}^3} + c(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{h}, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3).$$

Teniendo en cuenta esta identidad y la segunda ecuación del Problema 4.2.3 homogéneo, resulta que $\mathcal{R}^{-1}\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$, $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ es una solución del Problema 4.2.2 homogéneo. Entonces el Teorema 4.2.1 garantiza que $\mathcal{R}^{-1}\mathbf{h} = \mathbf{0}$ en \mathbb{R}^3 y $\mathbf{r} = \mathbf{0}$ en Ω_d , y concluimos que el Problema 4.2.3 homogéneo sólo admite la solución trivial. ■

Introducimos los operadores lineales continuos

$$\mathcal{A}: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}'(\Omega), \quad \mathcal{C}: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}'(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{D}: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{M}'(\Omega_d),$$

definidos por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbf{X}'(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega)} &:= a_0(\mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_2), & \langle \mathcal{C}\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbf{X}'(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega)} &:= c(\mathbf{q}_1, \bar{\mathbf{q}}_2), \\ \langle \mathcal{D}\mathbf{q}, \mathbf{m} \rangle_{\mathbf{M}'(\Omega_d) \times \mathbf{M}(\Omega_d)} &:= d(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{q}}), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$ y $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. Además, denotamos por

$$\mathcal{B}^*: H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{X}'(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathcal{D}^*: \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}'(\Omega)$$

los operadores duales de \mathcal{B} y \mathcal{D} , respectivamente. Entonces reformulamos el Problema 4.2.3 como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{C} & -i\omega\mu_0\mathcal{B}^* & \mathcal{D}^* \\ i\omega\mu_0\mathcal{B} & \mu_0\mathcal{V} & 0 \\ \mathcal{D} & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \lambda \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ 0 \\ \ell_d \end{pmatrix}, \quad (4.2.12)$$

siendo

$$\langle \ell, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega)} := l(\bar{\mathbf{q}}) \quad \text{y} \quad \langle \ell_d, \mathbf{m} \rangle_{\mathbf{M}'(\Omega_d) \times \mathbf{M}(\Omega_d)} := (\mathbf{j}_d, \bar{\mathbf{m}})_{0,\Omega_d}$$

para cualesquiera $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$ y $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. Utilizando la expresión (4.2.11), podemos eliminar λ del sistema (4.2.12) y reescribirlo de forma reducida como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} + \omega\mu_0\mathcal{B}^*\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B} + \mathcal{C} & \mathcal{D}^* \\ \mathcal{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell \\ \ell_d \end{pmatrix}. \quad (4.2.13)$$

4.3. Esquema discreto

En lo que sigue, suponemos que Ω y Ω_c son poliedros de Lipschitz. Consideramos $\{\mathcal{T}_h(\Omega); h > 0\}$ una familia regular de mallas del dominio Ω tales que cada elemento $T \in \mathcal{T}_h(\Omega)$ es un tetraedro contenido en $\bar{\Omega}_c$ ó en $\bar{\Omega}_d$. Denotamos por h el máximo diámetro de los tetraedros de $\mathcal{T}_h(\Omega)$. Además, definimos $\mathcal{T}_h(\Omega_d)$ como la restricción de $\mathcal{T}_h(\Omega)$ al dominio Ω_d ,

$$\mathcal{T}_h(\Omega_d) := \{T \in \mathcal{T}_h(\Omega); T \subset \bar{\Omega}_d\},$$

y $\mathcal{T}_h(\Gamma)$ como la triangulación que induce $\mathcal{T}_h(\Omega)$ sobre la superficie Γ ,

$$\mathcal{T}_h(\Gamma) := \{F \text{ cara de algún } T \in \mathcal{T}_h(\Omega); F \subset \Gamma\}.$$

4.3.1. Descripción del problema discreto

En este apartado, proponemos una versión discreta de (4.2.3) combinando elementos finitos y elementos de contorno para aproximar conformemente el espacio $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$.

Más concretamente, consideramos el espacio de elementos finitos de arista

$$\mathcal{ND}_h(\Omega) := \{\mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega); \mathbf{q}|_T \in \mathcal{ND}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega)\}, \quad (4.3.1)$$

y aproximamos las funciones de $\mathbf{X}(\Omega)$ usando las del espacio de dimensión finita

$$\mathbf{X}_h(\Omega) := \mathcal{ND}_h(\Omega) \cap \mathbf{X}(\Omega);$$

véanse las definiciones (3.2.1) y (3.2.4).

Además, aproximamos las funciones de $H_0^{-1/2}(\Gamma)$ con funciones que son constantes a trozos con respecto a la triangulación $\mathcal{T}_h(\Gamma)$. De hecho, utilizamos el espacio de dimensión finita

$$\Lambda_h(\Gamma) := \{ \eta \in L^2(\Gamma); \langle \eta, 1 \rangle_\Gamma = 0, \eta|_F \in \mathbb{C} \forall F \in \mathcal{T}_h(\Gamma) \};$$

véase la definición (3.2.5).

Finalmente, hacemos una discretización conforme del espacio $\mathbf{H}(\text{div}, \Omega_d)$ utilizando elementos finitos de Raviart–Thomas de primer orden:

$$\mathcal{RT}_h(\Omega_d) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\text{div}, \Omega); \mathbf{q}|_T \in \mathcal{RT}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_d) \},$$

siendo $\mathcal{RT}(T) := \{ a \mathbf{x} + \mathbf{b}; a \in \mathbb{C}, \mathbf{b} \in \mathbb{C}^3 \}$; véase [45, Sección 5.4]. Entonces aproximamos las funciones de $\mathbf{M}(\Omega_d)$ usando las del espacio de dimensión finita

$$\mathbf{M}_h(\Omega_d) := \mathcal{RT}_h(\Omega_d) \cap \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Proponemos la siguiente versión discreta del Problema 4.2.3, donde denotamos $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega) := \mathbf{X}_h(\Omega) \times \Lambda_h(\Gamma)$.

Problema 4.3.1 Buscar $\widehat{\mathbf{h}}_h := (\mathbf{h}_h, \lambda_h) \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega)$ y $\mathbf{r}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ con

$$\begin{aligned} a(\widehat{\mathbf{h}}_h, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{h}_h, \mathbf{q}) + d(\mathbf{r}_h(t), \mathbf{q}) &= l(\mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega), \\ \overline{d(\mathbf{m}, \mathbf{h}_h)} &= (\mathbf{j}_d, \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d). \end{aligned}$$

Nota 4.3.1 Tal y como señalamos en la Nota 3.2.1, la inversa del operador tangencial \mathbf{rot}_Γ está involucrada en la definición de la forma sesquilineal $a(\cdot, \cdot)$ y, en consecuencia, nuestro método numérico parece difícil de implementar y computacionalmente costoso. De nuevo, esto no sucede en la práctica porque dicho operador puede eliminarse en el cálculo efectivo de la matriz del sistema lineal asociado al Problema 4.3.1. Al respecto, véase el Párrafo 4.4.

4.3.2. Análisis del esquema discreto

Introducimos los espacios

$$\begin{aligned}\mathbf{X}_0(\Omega) &:= \{\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega); \mathbf{rot} \mathbf{q} = \mathbf{0} \text{ en } \Omega_d\}, \\ \mathbf{X}_{0,h}(\Omega) &:= \{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega); d(\mathbf{m}, \mathbf{q}) = 0 \ \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)\},\end{aligned}$$

que son subespacios cerrados de $\mathbf{X}(\Omega)$ y de $\mathbf{X}_h(\Omega)$, respectivamente. Además, en [45, Lema 5.40] se muestra que $\{\mathbf{rot} \mathbf{q}|_{\Omega_d}; \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega)\} \subset \mathbf{M}_h(\Omega_d)$; en consecuencia, tenemos que

$$\mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \subset \mathbf{X}_0(\Omega).$$

Denotamos por \mathcal{I}_h el operador de interpolación asociado al espacio de elementos finitos de Nédélec $\mathcal{N}\mathcal{D}_h(\Omega)$. Recordemos que en el Párrafo 3.2.1 definimos explícitamente este operador y señalamos sus propiedades fundamentales.

Por otra parte, sea \mathcal{I}_h^{RT} el operador de interpolación asociado al espacio de elementos finitos de Raviart–Thomas $\mathcal{RT}_h(\Omega_d)$. En [45, Teorema 5.25] se demuestra que, para cada $s \in (1/2, 1]$, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\|\mathbf{q} - \mathcal{I}_h^{RT} \mathbf{q}\|_{0,\Omega_d} \leq C h^s \|\mathbf{q}\|_{s,\Omega_d} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{H}^s(\Omega_d). \quad (4.3.2)$$

Además, en [45, Lema 5.40] se prueba que, para todo $s > 1/2$,

$$\mathbf{rot}(\mathcal{I}_h \mathbf{q})|_{\Omega_d} = \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{rot} \mathbf{q}|_{\Omega_d}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega). \quad (4.3.3)$$

El siguiente resultado es una herramienta fundamental para el análisis del esquema discreto (4.3.1).

Lema 4.3.1. *Existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|d(\mathbf{m}, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}} \geq \beta \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d},$$

para todo $\mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$.

Demostración. Según el Lema 4.1.3, la función $\mathcal{M}\mathbf{m}|_{\Omega_d} \in \mathbf{H}^1(\Omega_d)$ satisface que $\mathbf{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m}) = \mathbf{m}$ en Ω_d . En particular, para cada tetraedro $T \in \mathcal{T}_h(\Omega_d)$ tenemos que $\mathcal{M}_h\mathbf{m}|_T \in \mathbf{H}^1(T)$ y, en consecuencia, la traza de $\mathcal{M}\mathbf{m}$ sobre ∂T pertenece al espacio $\mathbf{L}^p(\partial T)$ para todo $p \geq 2$. En estas condiciones, [7, Lema 4.7] permite definir $\mathcal{M}_h\mathbf{m} := \mathcal{I}_h^d(\mathcal{M}\mathbf{m}|_{\Omega_d})$, donde \mathcal{I}_h^d denota el operador de interpolación de Nédélec asociado al espacio

$$\mathcal{ND}_h(\Omega_d) := \{ \mathbf{q} \in \mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega) ; \mathbf{q}|_T \in \mathcal{ND}(T) \forall T \in \mathcal{T}_h(\Omega_d) \}.$$

Por un lado, razonando como en la demostración de [7, Proposición 4.6], deducimos que

$$\|\mathcal{M}_h\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d} \leq C_1 \left(h \|\mathbf{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m})\|_{0,\Omega_d} + \|\mathcal{M}\mathbf{m}\|_{1,\Omega_d} \right). \quad (4.3.4)$$

Por otro lado, la propiedad (4.3.3) garantiza que

$$\mathbf{rot}(\mathcal{M}_h\mathbf{m}) = \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{rot}(\mathcal{M}\mathbf{m})) = \mathbf{m} \quad \text{en } \Omega_d. \quad (4.3.5)$$

Luego, utilizando el Lema 4.1.3 junto con (4.3.4–4.3.5), tenemos que

$$\|\mathcal{M}_h\mathbf{m}\|_{\mathbf{rot},\Omega_d} \leq C_2 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}.$$

Además, en [2] se muestra que existe un operador de extensión discreto

$$\mathcal{ND}_h(\Omega_d) \rightarrow \mathcal{ND}_h(\Omega)$$

que es uniformemente continuo con respecto al parámetro $h > 0$. Así que existe una función $\widetilde{\mathcal{M}}_h\mathbf{m} \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ que extiende $\mathcal{M}_h\mathbf{m}$ a todo Ω y que cumple

$$\|\widetilde{\mathcal{M}}_h\mathbf{m}\|_{\mathbf{rot},\Omega} \leq C_3 \|\mathcal{M}_h\mathbf{m}\|_{\mathbf{rot},\Omega_d} \leq C_3 C_2 \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}. \quad (4.3.6)$$

Por lo tanto, combinando (4.3.5) y (4.3.6), concluimos que

$$\sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|d(\mathbf{m}, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot},\Omega}} \geq \frac{|d(\mathbf{m}, \widetilde{\mathcal{M}}_h\mathbf{m})|}{\|\widetilde{\mathcal{M}}_h\mathbf{m}\|_{\mathbf{rot},\Omega}} \geq \frac{1}{C_2 C_3} \|\mathbf{m}\|_{0,\Omega_d}.$$

■

Teorema 4.3.2. *El Problema 4.3.1 tiene una única solución.*

Demostración. En primer lugar, el Lema 4.3.1 junto con [29, Teorema 1.1] garantizan la existencia de una función $\mathbf{h}_h^d \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ tal que

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{h}_h^d) = \overline{(\mathbf{j}_d, \mathbf{m})}_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d).$$

Entonces definimos $\mathbf{h}_h^* := \mathbf{h}_h - \mathbf{h}_h^d \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y reescribimos el Problema 4.3.1 en términos de $\widehat{\mathbf{h}}_h^* := (\mathbf{h}_h^*, \lambda_h) \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \times \Lambda_h(\Gamma)$ como

$$a(\widehat{\mathbf{h}}_h^*, \widehat{\mathbf{q}}) + c(\mathbf{h}_h^*, \mathbf{q}) = l^*(\mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \times \Lambda_h(\Gamma), \quad (4.3.7)$$

donde

$$l^*(\mathbf{q}) := l(\mathbf{q}) - a((\mathbf{h}_h^d, 0), \widehat{\mathbf{q}}) - c(\mathbf{h}_h^d, \mathbf{q}).$$

Introducimos los operadores lineales y acotados

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_h &: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}'_h(\Omega), & \mathcal{V}_h &: H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \Lambda'_h(\Gamma), \\ \mathcal{D}_h &: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{M}'_h(\Omega_d), & \mathcal{D}_h^* &: \mathbf{M}(\Omega_d) \rightarrow \mathbf{X}'_h(\Omega), \\ \mathcal{B}_h &: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \Lambda'_h(\Gamma), & \mathcal{B}_h^* &: H_0^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow \mathbf{X}'_h(\Omega), \\ \mathcal{C}_h &: \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}'_h(\Omega), \end{aligned}$$

caracterizados por

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_h \mathbf{q}, \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= a_0(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}_h), & \langle \mathcal{V}_h \eta, \eta_h \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} &= \langle \mathcal{V} \eta, \bar{\eta}_h \rangle_{1/2, \Gamma}, \\ \langle \mathcal{D}_h \mathbf{q}, \mathbf{m}_h \rangle_{\mathbf{M}'_h(\Omega_d) \times \mathbf{M}_h(\Omega_d)} &= d(\mathbf{m}_h, \bar{\mathbf{q}}), & \langle \mathcal{D}_h^* \mathbf{m}, \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= d(\mathbf{m}, \bar{\mathbf{q}}_h), \\ \langle \mathcal{B}_h \mathbf{q}, \eta_h \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} &= \langle \mathcal{B} \mathbf{q}, \bar{\eta}_h \rangle_{1/2, \Gamma}, & \langle \mathcal{B}_h^* \eta, \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= \langle \mathcal{B} \mathbf{q}_h, \bar{\eta} \rangle_{1/2, \Gamma}, \\ \langle \mathcal{C}_h \mathbf{q}, \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= c(\mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}}_h), \end{aligned}$$

respectivamente, para cualesquiera $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$, $\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$, $\eta \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ y para todo $\mathbf{q}_h \in \mathbf{X}_h(\Omega)$, $\mathbf{m}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$, $\eta_h \in \Lambda_h(\Gamma)$. Además, según el Teorema 2.7.5,

$$\langle \mathcal{V}_h \eta_h, \bar{\eta}_h \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} = \langle \mathcal{V} \eta_h, \eta_h \rangle_{1/2, \Gamma} \geq \alpha_1 \|\eta_h\|_{-1/2, \Gamma}^2 \quad \forall \eta_h \in \Lambda_h(\Gamma),$$

de modo que $\mathcal{V}_h : \Lambda_h(\Gamma) \rightarrow \Lambda'_h(\Gamma)$ es un isomorfismo. Esta propiedad nos permite desacoplar el sistema (4.3.7) como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A}_h + \imath\omega\mu_0\mathcal{B}_h^*\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h + \mathcal{C}_h & 0 \\ \mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h & \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}_h^* \\ \lambda_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell^* \\ -\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h\mathbf{h}_h^d \end{pmatrix}, \quad (4.3.8)$$

donde $\ell^* \in \mathbf{X}'_{0,h}(\Omega)$ está definido por

$$\langle \ell^*, \bar{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} = l^*(\mathbf{q}) - \imath\omega\mu_0 \langle \mathcal{B}_h^*\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h\mathbf{h}_h^d, \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega).$$

También tenemos que

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left[\frac{1-\imath}{\omega\mu_0} \langle (\mathcal{A}_h + \imath\omega\mu_0\mathcal{B}_h^*\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h + \mathcal{C}_h) \mathbf{q}, \bar{\mathbf{q}} \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} \right] &\geq \\ &\geq \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}, \mathbf{q} \right)_{0,\Omega} + \frac{1}{\omega\mu_0} \left(\frac{1}{\sigma} \operatorname{rot} \mathbf{q}, \operatorname{rot} \mathbf{q} \right)_{0,\Omega_c}, \end{aligned}$$

para cada $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$, así que el operador

$$\mathcal{A}_h + \imath\omega\mu_0\mathcal{B}_h^*\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h + \mathcal{C}_h : \mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \rightarrow \mathbf{X}'_{0,h}(\Omega)$$

es invertible. En consecuencia, queda garantizada la existencia y unicidad de la incógnita $\mathbf{h}_h^* \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y, por lo tanto, también de la función

$$\lambda_h = -\mathcal{V}_h^{-1}\mathcal{B}_h(\mathbf{h}_h^* + \mathbf{h}_h^d). \quad (4.3.9)$$

Para estudiar la existencia y unicidad del multiplicador a nivel discreto, $\mathbf{r}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$, introducimos el operador lineal

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_h : \mathbf{X}_h(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{q} &\mapsto \mathcal{F}_h(\mathbf{q}) := l(\bar{\mathbf{q}}) - c(\mathbf{h}_h, \bar{\mathbf{q}}) - a(\widehat{\mathbf{h}}_h, (\bar{\mathbf{q}}, 0)). \end{aligned} \quad (4.3.10)$$

Con esta notación, la ecuación que satisface $\widehat{\mathbf{h}}_h$ es equivalente a

$$\mathcal{F}_h(\mathbf{q}) = 0 \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega). \quad (4.3.11)$$

Luego, recordando la definición de $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y aplicando el Lema 4.3.1, concluimos que existe un único $\mathbf{r}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ con

$$d(\mathbf{r}_h, \bar{\mathbf{q}}) = \mathcal{F}_h(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega). \quad (4.3.12)$$

■

4.3.3. Análisis de la convergencia

Teniendo en cuenta el Teorema 2.7.5, podemos definir el operador lineal

$$\begin{aligned}\rho : \mathbf{X}(\Omega) &\rightarrow H_0^{-1/2}(\Gamma) \\ \mathbf{q} &\mapsto \rho\mathbf{q} := \mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}\mathbf{q},\end{aligned}$$

que es continuo. Recordemos que el operador $\mathcal{V} : H^{-1/2}(\Gamma) \rightarrow H^{1/2}(\Gamma)$ es elíptico (véase el Teorema 2.7.5) y que el operador $\mathcal{B} : \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow H_0^{1/2}(\Gamma)$ es continuo; así que el Lema de Lax–Milgram garantiza que la función $\rho\mathbf{q} \in H_0^{-1/2}(\Gamma)$ se caracteriza de forma única por cumplir

$$\langle \eta, \mathcal{V}\rho\mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} = \langle \eta, \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2}(\Gamma). \quad (4.3.13)$$

Además, en virtud de (4.2.6), tenemos que

$$\|\rho\mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_1 \|\gamma\tau\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (4.3.14)$$

Ahora definimos el operador $\rho_h : \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \Lambda_h(\Gamma)$ utilizando una versión discreta de la ecuación variacional anterior. Es decir, $\rho_h\mathbf{q} \in \Lambda_h(\Gamma)$ se caracteriza de forma única por

$$\langle \eta, \mathcal{V}\rho_h\mathbf{q} \rangle_{\Gamma} = \langle \eta, \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_{\Gamma} \quad \forall \eta \in \Lambda_h(\Gamma). \quad (4.3.15)$$

En efecto, utilizando nuevamente la elipticidad de \mathcal{V} y la propiedad (4.2.6), deducimos que el operador ρ_h está bien definido y que

$$\|\rho_h\mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_2 \|\gamma\tau\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}. \quad (4.3.16)$$

Además, se cumple la siguiente desigualdad tipo *Lema de Céa*:

$$\|\rho\mathbf{q} - \rho_h\mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_3 \|\rho\mathbf{q} - \eta\|_{-1/2, \Gamma} \quad \forall \eta \in \Lambda_h(\Gamma), \quad (4.3.17)$$

para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$.

Lema 4.3.3. *Dado $s \in (1/2, 1]$, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\|\rho\mathbf{q} - \rho_h\mathbf{q}\|_{-1/2, \Gamma} \leq C h^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)},$$

para cada $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega) \cap \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Demostración. Fijado $s > 1/2$, sabemos que $\gamma_\tau : \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega) \rightarrow \mathbf{L}_\tau^2(\Gamma)$ está acotado; cf. [21, Teorema 3]. Utilizando el isomorfismo definido en (4.2.5), deducimos que existe un potencial $\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$ con

$$\mathbf{rot}_\Gamma \eta = \gamma_\tau \mathbf{q} \in \mathbf{L}_\tau^2(\Gamma).$$

Nótese que este potencial se caracteriza por ser la única solución del problema variacional

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{buscar } \eta \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C} \text{ tal que} \\ \langle \mathbf{rot}_\Gamma \eta, \mathbf{rot}_\Gamma \lambda \rangle_\Gamma = \langle \gamma_\tau \mathbf{q}, \mathbf{rot}_\Gamma \lambda \rangle_\Gamma \quad \forall \lambda \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C}. \end{array} \right. \quad (4.3.18)$$

Como $\eta \in H^1(\Gamma)$, tenemos que

$$\mathcal{V} \rho \mathbf{q} = \mathcal{B} \mathbf{q} = \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \eta \in H^1(\Gamma)/\mathbb{C}.$$

Entonces el Teorema 2.7.5 garantiza que $\rho \mathbf{q} \in L_0^2(\Gamma)$ con

$$\|\rho \mathbf{q}\|_{0,\Gamma} \leq C \left(\|\rho \mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma} + \left\| \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \eta \right\|_{1,\Gamma} \right) \leq C \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}.$$

Finalmente, teniendo en cuenta esta estimación, la desigualdad (4.3.17) y la propiedad de aproximación

$$\inf_{\lambda_h \in \Lambda_h(\Gamma)} \|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2,\Gamma} \leq C h^{1/2} \|\lambda\|_{0,\Gamma} \quad \forall \lambda \in L_0^2(\Gamma),$$

concluimos que

$$\|\rho \mathbf{q} - \rho_h \mathbf{q}\|_{-1/2,\Gamma} \leq C h^{1/2} \|\rho \mathbf{q}\|_{0,\Gamma} \leq C h^{1/2} \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}.$$

■

A continuación estudiaremos el orden de convergencia del esquema discreto dado por el Problema 4.3.1 cuando hacemos hipótesis de regularidad sobre la solución exacta del Problema 4.2.3.

Teorema 4.3.4. Sean \mathbf{h} y \mathbf{h}_h las primeras componentes de la soluciones de los Problemas 4.2.3 y 4.3.1, respectivamente. Si $\mathbf{h} \in \mathbf{X}(\Omega) \cap \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)$ para algún $s > 1/2$, entonces tenemos la siguiente estimación del error:

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq C h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}.$$

Demostración. En esta demostración, seguimos el razonamiento expuesto en [29, Teorema 1.1].

Comenzamos notando que el Lema 4.3.1 permite definir $\mathbf{p}_h \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ con

$$\mathcal{D}_h \mathbf{p}_h = \mathcal{D}_h(\mathbf{h} - \mathcal{I}_h \mathbf{h}). \quad (4.3.19)$$

Entonces la función $\mathbf{h}_h^d := \mathbf{p}_h + \mathcal{I}_h \mathbf{h} \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ cumple

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{h}_h^d) = \overline{(\mathbf{j}_d, \mathbf{m})}_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d).$$

Descomponemos $\mathbf{h} - \mathbf{h}_h$ como $\mathbf{h} - \mathbf{h}_h = \mathbf{e}_h^1 - \mathbf{e}_h^2$, donde

$$\mathbf{e}_h^1 := \mathbf{h} - \mathbf{h}_h^d \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_h^2 := \mathbf{h}_h - \mathbf{h}_h^d.$$

A continuación acotamos la norma de los campos \mathbf{e}_h^1 y \mathbf{e}_h^2 en $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Por un lado, aplicando la desigualdad triangular para $\mathbf{e}_h^1 = \mathbf{h} - \mathcal{I}_h \mathbf{h} - \mathbf{p}_h$,

$$\|\mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \|\mathbf{h} - \mathcal{I}_h \mathbf{h}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}, \quad (4.3.20)$$

donde $\|d\| > 0$ es la norma de la forma sesquilineal $d(\cdot, \cdot)$ y $\beta > 0$ es la constante involucrada en el Lema 4.3.1.

Por otro lado, la primera ecuación del sistema (4.2.13) implica que

$$a_0(\mathbf{h}, \mathbf{q}) + \omega \mu_0 \langle \rho \mathbf{h}, \mathcal{B} \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} + c(\mathbf{h}, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\Omega).$$

Análogamente, la primera ecuación de (4.3.8) garantiza que

$$a_0(\mathbf{h}_h, \mathbf{q}) + \omega \mu_0 \langle \rho_h \mathbf{h}_h, \mathcal{B}_h \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} + c(\mathbf{h}_h, \mathbf{q}) = l(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega).$$

Puesto que $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \subset \mathbf{X}_0(\Omega)$, deducimos de las dos últimas identidades que

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{e}_h^2, \mathbf{q}) + c(\mathbf{e}_h^2, \mathbf{q}) + \omega\mu_0 \langle \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \mathbf{e}_h^2, \mathcal{B}_h \mathbf{q} \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} = \\ = a_0(\mathbf{e}_h^1, \mathbf{q}) + c(\mathbf{e}_h^1, \mathbf{q}) + \omega\mu_0 \langle \rho \mathbf{h} - \rho_h \mathbf{h}, \mathcal{B}_h \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} + \omega\mu_0 \langle \rho_h \mathbf{e}_h^1, \mathcal{B}_h \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} \end{aligned}$$

para cualquier $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}$. En particular, se cumple para $\mathbf{q} = \mathbf{e}_h^2 \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y entonces, aplicando (4.2.7), (4.2.6) y (4.3.16),

$$\begin{aligned} |a_0(\mathbf{e}_h^2, \mathbf{e}_h^2) + \mu_0 \langle \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \mathbf{e}_h^2, \mathbf{e}_h^2 \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} + c(\mathbf{e}_h^2, \mathbf{e}_h^2)| \leq \\ \leq C_1 \left(\|\mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot}, \Omega} + \|\rho \mathbf{h} - \rho_h \mathbf{h}\|_{-1/2, \Gamma} \right) \|\mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{rot}, \Omega}. \end{aligned}$$

Utilizando la hipótesis (1.1.6), la propiedad (4.2.8) y que el operador $\mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h$ es no negativo, deducimos que

$$\|\mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{rot}, \Omega}^2 \leq C_2 \left(\|\mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot}, \Omega} + \|\rho \mathbf{h} - \rho_h \mathbf{h}\|_{-1/2, \Gamma} \right) \|\mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{rot}, \Omega}.$$

Simplificando y aplicando el Lema 4.3.3,

$$\|\mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq C_3 \left(\|\mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot}, \Omega} + h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} \right). \quad (4.3.21)$$

Finalmente, aplicando la desigualdad triangular para $\mathbf{h} - \mathbf{h}_h = \mathbf{e}_h^1 - \mathbf{e}_h^2$ junto con las cotas (4.3.20) y (4.3.21), resulta que

$$\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq C_4 \left(\|\mathbf{h} - \mathcal{I}_h \mathbf{h}\|_{\mathbf{rot}, \Omega} + h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} \right),$$

y concluimos utilizando la estimación del error de interpolación del Teorema 3.2.2. ■

Corolario 4.3.5. *Bajo las hipótesis del Teorema 4.3.4, tenemos que*

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2, \Gamma} \leq C h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}.$$

Demostración. Partiendo de la primera ecuación del Problema 4.2.3, dedujimos la ecuación (4.2.11), que es equivalente a $\lambda = -\rho \mathbf{h}$. Análogamente, partiendo de

la primera ecuación del Problema 4.3.1 obtenemos que $\lambda_h = -\rho_h \mathbf{h}_h$. Luego, utilizando la desigualdad triangular,

$$\|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2, \Gamma} \leq \|\rho \mathbf{h} - \rho_h \mathbf{h}\|_{-1/2, \Gamma} + \|\rho_h (\mathbf{h} - \mathbf{h}_h)\|_{-1/2, \Gamma}.$$

Además, la propiedad (4.3.16) garantiza que

$$\|\rho_h (\mathbf{h} - \mathbf{h}_h)\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_1 \|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega}.$$

Así que concluimos el resultado aplicando el Lema 4.3.3 y el Teorema 4.3.4. ■

Corolario 4.3.6. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.4 y que $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d) \cap \mathbf{H}^r(\Omega_d)$ para algún $r > 1/2$. Entonces*

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h\|_{0, \Omega_d} \leq C h^{1/2} \left(\|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} + \|\mathbf{r}\|_{r, \Omega_d} \right).$$

Demostración. Introducimos el operador lineal continuo

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \mathbf{X}(\Omega) &\rightarrow \mathbb{C} \\ \mathbf{q} &\mapsto \mathcal{F}(\mathbf{q}) := l(\bar{\mathbf{q}}) - c(\mathbf{h}, \bar{\mathbf{q}}) - a(\hat{\mathbf{h}}, (\bar{\mathbf{q}}, 0)), \end{aligned}$$

y recordemos que definimos una versión discreta $\mathcal{F}_h : \mathbf{X}_h(\Omega) \rightarrow \mathbb{C}$ en (4.3.10). Nótese que los multiplicadores de Lagrange $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ y $\mathbf{r}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ satisfacen

$$d(\mathbf{r}, \bar{\mathbf{q}}) = \mathcal{F}(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega) \quad \text{y} \quad d(\mathbf{r}_h, \bar{\mathbf{q}}) = \mathcal{F}_h(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega).$$

Estas propiedades sugieren tomar una función auxiliar $\tilde{\mathbf{r}}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ tal que

$$d(\tilde{\mathbf{r}}_h, \bar{\mathbf{q}}) = \mathcal{F}(\mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega).$$

En efecto, el Lema 4.3.1 garantiza que esta función existe y es única, porque el operador $\mathcal{F} \in \mathbf{X}'(\Omega)$ se anula sobre $\mathbf{X}_0(\Omega)$ y, en particular, sobre $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$.

Descomponemos $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h$ como $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h = \mathbf{e}_h^1 + \mathbf{e}_h^2$, donde

$$\mathbf{e}_h^1 := \mathbf{r} - \tilde{\mathbf{r}}_h \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_h^2 := \tilde{\mathbf{r}}_h - \mathbf{r}_h.$$

A continuación acotamos la norma de los campos \mathbf{e}_h^1 y \mathbf{e}_h^2 en $\mathbf{L}^2(\Omega_d)$.

Por un lado, utilizando la desigualdad triangular para $\mathbf{e}_h^1 = \mathbf{r} - \mathbf{s} + \mathbf{s} - \tilde{\mathbf{r}}_h$ y aplicando el Lema 4.3.1,

$$\|\mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega_d} \leq \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|_{0,\Omega_d} + \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{d(\tilde{\mathbf{r}}_h - \mathbf{s}, \mathbf{q})}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot},\Omega}} \quad \forall \mathbf{s} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d).$$

Como $d(\tilde{\mathbf{r}}_h, \mathbf{q}) = d(\mathbf{r}, \mathbf{q})$ para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega)$, deducimos que

$$\|\mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega_d} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \inf_{\mathbf{s} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)} \|\mathbf{r} - \mathbf{s}\|_{0,\Omega_d}.$$

Además, bajo la hipótesis de regularidad $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d) \cap \mathbf{H}^r(\Omega_d)$, la propiedad (4.3.3) y el Teorema 4.1.3 implican que

$$\mathcal{I}_h^{RT} \mathbf{r} = \mathcal{I}_h^{RT}(\text{rot}(\mathcal{M}\mathbf{r})) = \text{rot}(\mathcal{M}_h \mathbf{r}) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d),$$

siendo $\mathcal{M}_h \mathbf{r} := \mathcal{I}_h^d(\mathcal{M}\mathbf{r}|_{\Omega_d})$. Luego

$$\|\mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega_d} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \|\mathbf{r} - \mathcal{I}_h^{RT} \mathbf{r}\|_{0,\Omega_d}. \quad (4.3.22)$$

Por otro lado, según el Lema 4.3.1,

$$\|\mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega_d} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|d(\tilde{\mathbf{r}}_h - \mathbf{r}_h, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot},\Omega}} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathcal{F}(\mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(\mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot},\Omega}}.$$

Observemos que

$$|\mathcal{F}(\mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(\mathbf{q})| \leq C_1 \left(\|(\mathbf{h} - \mathbf{h}_h)\|_{\text{rot},\Omega} + \|\lambda - \lambda_h\|_{-1/2,\Gamma} \right) \|\mathbf{q}\|_{\text{rot},\Omega} \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega).$$

Así que, aplicando el Teorema 4.3.4 y el Corolario 4.3.5,

$$\|\mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega_d} \leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathcal{F}(\mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(\mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\text{rot},\Omega}} \leq C_2 h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\text{rot},\Omega)}. \quad (4.3.23)$$

Finalmente, utilizando la desigualdad triangular para $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h = \mathbf{e}_h^1 + \mathbf{e}_h^2$ junto con las cotas (4.3.22) y (4.3.23), tenemos que

$$\|\mathbf{r} - \mathbf{r}_h\|_{0,\Omega_d} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \|\mathbf{r} - \mathcal{I}_h^{RT} \mathbf{r}\|_{0,\Omega_d} + C_2 h^{1/2} \|\mathbf{h}\|_{\mathbf{H}^s(\text{rot},\Omega)}.$$

Por lo tanto, concluimos el resultado aplicando la estimación del error de interpolación (4.3.2). ■

4.4. Forma matricial del esquema discreto

En este apartado reformulamos el Problema 4.3.1 como un sistema lineal. Para ello comenzamos determinando explícitamente una base del espacio $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega)$ y un sistema generador de $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$.

Sea $\mathcal{A}_h(\Omega)$ el conjunto de las aristas de la malla $\mathcal{T}_h(\Omega)$. Definimos los conjuntos $\mathcal{A}_h^0(\Omega)$ y $\mathcal{A}_h(\Omega_d)$ de aristas interiores a Ω y $\overline{\Omega}_d$, respectivamente; es decir,

$$\mathcal{A}_h^0(\Omega) := \{E \in \mathcal{A}_h(\Omega); E \cap \Omega \neq \emptyset\} \quad \text{y} \quad \mathcal{A}_h(\Omega_d) := \{E \in \mathcal{A}_h(\Omega); E \subseteq \overline{\Omega}_d\}.$$

También introducimos el conjunto $\mathcal{V}_h(\Omega)$ de vértices de la malla $\mathcal{T}_h(\Omega)$, así como

$$\mathcal{V}_h(\Gamma) := \{v \in \mathcal{V}_h(\Omega); v \in \Gamma\}.$$

En la Proposición 3.3.1 vimos que, si fijamos un vértice $v_0 \in \mathcal{V}_h(\Gamma)$, entonces el siguiente conjunto determina una base de $\mathbf{X}_h(\Omega)$:

$$B_h(\Omega) := \{\mathbf{q}_E; E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)\} \cup \{\nabla\varphi_v; v \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}\}.$$

Además, en el Párrafo 3.3.1 señalamos que, si fijamos una cara $F_0 \in \mathcal{T}_h(\Gamma)$, entonces el siguiente conjunto constituye una base de $\Lambda_h(\Gamma)$:

$$\left\{ \rho_F := \frac{1}{|F|} \chi_F - \frac{1}{|F_0|} \chi_{F_0}; F \in \mathcal{T}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\} \right\}.$$

En lo que respecta al espacio $\mathbf{M}(\Omega_d)$, nótese que

$$\{(\mathbf{rot} \mathbf{q})|_{\Omega_d}; \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega)\} \subseteq \mathbf{M}_h(\Omega_d).$$

Por otro lado, la inclusión recíproca es consecuencia de la condición inf-sup del Lema 4.3.1. En efecto, para cada $\mathbf{r}_h \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$, dicha condición inf-sup garantiza la existencia de algún $\mathbf{q}_h \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ tal que

$$d(\mathbf{q}_h, \mathbf{m}) = (\mathbf{r}_h, \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d);$$

es decir, $\mathbf{r}_h = (\mathbf{rot} \mathbf{q}_h)|_{\Omega_d}$. En consecuencia,

$$\{(\mathbf{rot} \mathbf{q})|_{\Omega_d}; \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega)\} = \mathbf{M}_h(\Omega_d)$$

y, por lo tanto, el conjunto

$$\{(\mathbf{rot} \mathbf{q}_E)|_{\Omega_d}; E \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)\}$$

es un sistema generador de $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$.

Expresamos las incógnitas del Problema 3.2.1 en términos de las bases de los espacios $\mathbf{X}_h(\Omega)$ y $\Lambda_h(\Gamma)$:

$$\mathbf{h}_h = \sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)} h_E \mathbf{q}_E + \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}} h_v \nabla \varphi_v \quad \text{y} \quad \lambda_h = \sum_{F \in \mathcal{T}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}} \lambda_F \rho_F;$$

y del sistema generador de $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$:

$$\mathbf{r}_h = \sum_{E \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)} r_E (\mathbf{rot} \mathbf{q}_E)|_{\Omega_d}.$$

Recordemos que en (3.3.2) introdujimos las matrices complejas

$$\begin{aligned} A_{E,E'}^\Omega &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'} \right)_{0,\Omega}, & C_{E,E'} &:= -\frac{\imath}{\omega \mu_0} c(\mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'}), \\ A_{E,v}^{\Omega\Gamma} &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \nabla \varphi_v \right)_{0,\Omega}, & A_{v,v'}^\Gamma &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \nabla \varphi_v, \nabla \varphi_{v'} \right)_{0,\Omega}, \\ R_{v,v'} &:= (\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_{v'}, \mathbf{V}_\tau(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_v))_{0,\Gamma}, & B_{F,v} &:= (\rho_F, \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \gamma \varphi_v)_{0,\Gamma}, \\ V_{F,F'} &:= (\rho_{F'}, \mathcal{V} \rho_F)_{0,\Gamma}, \end{aligned}$$

para cualesquiera aristas interiores $E, E' \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)$; vértices sobre la frontera $v, v' \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}$ y caras de la frontera $F, F' \in \mathcal{T}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}$.

Ahora, definimos además la matriz

$$D_{E,E'} := -\frac{\imath}{\omega \mu_0} (\mathbf{rot} \mathbf{q}_E, \mathbf{rot} \mathbf{q}_{E'})_{0,\Omega_d},$$

para cualesquiera $E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)$ y $E' \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)$.

Con esta notación, el Problema 4.3.1 es equivalente a determinar los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^\Omega &:= (h_E)_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)}, & \mathbf{h}^\Gamma &:= (h_v)_{v \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}}, \\ \boldsymbol{\lambda} &:= (\lambda_F)_{F \in \mathcal{T}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}}, & \mathbf{r} &:= (r_E)_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_d)}, \end{aligned}$$

solución del sistema lineal

$$\begin{pmatrix} A^\Omega + C & A^{\Omega\Gamma} & 0 & D \\ (A^{\Omega\Gamma})^\top & A^\Gamma + R & B^\top & 0 \\ 0 & B & V & 0 \\ D^\perp & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^\Omega \\ \mathbf{h}^\Sigma \\ -\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^\Omega \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{\Omega_d} \end{pmatrix}, \quad (4.4.1)$$

donde el término independiente viene dado por

$$\mathbf{f}^\Omega := -\frac{\iota}{\omega\mu_0} (l(\mathbf{q}_E))_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}^{\Omega_d} := -\frac{\iota}{\omega\mu_0} \left((\mathbf{j}^d, \mathbf{rot} \mathbf{q}_E)_{0, \Omega_d} \right)_{E \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)}.$$

4.4.1. Implementación del esquema discreto

Para implementar nuestro método numérico, necesitamos aproximar las integrales asociadas a la matriz y al segundo miembro del sistema lineal (4.4.1). Con este objetivo, seguimos la estrategia descrita en el Párrafo 3.3.3 y el Apéndice A.

Es importante recordar que dedujimos el sistema (4.4.1) utilizando, no una base del espacio $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$, sino un sistema que es generador pero no libre. En consecuencia, dicho sistema lineal es indeterminado. Esta dificultad puede solucionarse introduciendo un multiplicador de Lagrange adicional para imponer la restricción de divergencia nula asociada al espacio $\mathbf{M}(\Omega_d)$; véase [5, Sección 5.2]. Ahora bien, esta estrategia aumenta el tamaño del sistema lineal y, en consecuencia, el coste computacional de su ensamblaje y su resolución. Por esta razón, pensamos que en la práctica es preferible resolver el sistema indeterminado (4.4.1) con un método iterativo del tipo gradiente conjugado; véase [5, Nota 5.1].

4.5. Resultados numéricos

Hemos implementado el método descrito en este capítulo mediante un código MATLAB. A continuación presentamos algunos resultados numéricos que hemos

obtenido con dicho código para el problema test del Párrafo 3.4.1 cuando

$$\begin{aligned}\Omega_c &:= [(-1, 1) \times (-1, 1) \times (-0,5, 0,5)] \setminus (-0,5, 0,5)^3, \\ f(\mathbf{x}) &:= \begin{cases} (x_0^2 - |\mathbf{x}|^2)^\alpha & \text{si } |\mathbf{x}| < x_0, \\ 0 & \text{si no,} \end{cases}\end{aligned}$$

siendo $x_0 > 0$ y $\alpha \in [3, +\infty)$ dos parámetros reales. En lo que respecta a los datos físicos, de nuevo consideramos

$$\begin{aligned}\sigma(\mathbf{x}) &:= \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_c, \\ 0 & \text{si } \mathbf{x} \in \Omega_c^e, \end{cases} \\ \mu &:= 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^3, \\ \omega &:= 1 \quad \text{en } \mathbb{R}^3.\end{aligned}$$

Además, tomamos como dominio computacional

$$\Omega := (-1,5, 1,5) \times (-1,5, 1,5) \times (-1, 1).$$

Para estudiar el orden de convergencia del esquema discreto, hemos resuelto el Problema 4.3.1 para diferentes mallas, refinadas sucesivamente. En la Tabla 4.1 mostramos los resultados que hemos obtenido cuando $x_0 = 1$ y $\alpha = 4$. Más concretamente, identificamos cada malla con su diámetro, que denotamos por h , y desglosamos el error total en las partes asociadas al campo magnético \mathbf{h} , al potencial λ y al multiplicador de Lagrange $\mathbf{r} \in \mathbf{M}(\Omega_d)$. También mostramos el orden de convergencia experimental para el campo magnético, definido por

$$\epsilon = \frac{\log\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega} - \log\|\mathbf{h} - \mathbf{h}_{\tilde{h}}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}}{\log h - \log \tilde{h}},$$

donde h y \tilde{h} denotan los diámetros de dos mallas consecutivas.

Por otra parte, la Figura 4.2 muestra en escala logarítmica el error correspondiente al campo magnético \mathbf{h} frente al diámetro h de la malla. Observamos que este error presenta una dependencia lineal con respecto a dicho diámetro

h	$\ \mathbf{h} - \mathbf{h}_h\ _{\text{rot},\Omega}$	$\ \lambda - \lambda_h\ _{0,\Gamma}$	$\ \mathbf{r} - \mathbf{r}_h\ _{0,\Omega_d}$	ϵ
0.9299	56.1051	0.7107	52.0686	—
0.6601	39.3998	0.1413	24.4914	1.0315
0.4572	28.6757	0.0620	21.4884	0.8651
0.3653	22.0725	0.0173	11.7229	1.1663

Tabla 4.1: Resultados numéricos

h , mejorando el resultado previsto por el Teorema 4.3.4. De hecho, para este problema test, nuestro método se comporta como un método FEM mixto (sin elementos de contorno); véase la nota a continuación.

Nota 4.5.1 Hemos comparado los resultados numéricos obtenidos utilizando nuestro método BEM–FEM mixto con los resultados numéricos que se obtienen aplicando el método numérico propuesto en [5]. Más concretamente, dicho método es de tipo FEM mixto y consiste en resolver el sistema lineal (4.4.1) bloqueando a cero las incógnitas \mathbf{h}^Γ y $\boldsymbol{\lambda}$. En [5, Párrafo 6], se señala que este esquema numérico presenta el orden de convergencia $O(h)$ siempre que la solución exacta sea suficientemente regular.

Para el problema test anterior y empleando las mismas mallas, hemos observado que los resultados numéricos obtenidos con ambos métodos son similares para las incógnitas \mathbf{h}^Ω y \mathbf{r} . Esto sucede porque la incógnita de frontera λ se anula, y además el campo magnético \mathbf{h} y el multiplicador \mathbf{r} tienen sus soportes contenidos en el dominio computacional Ω .

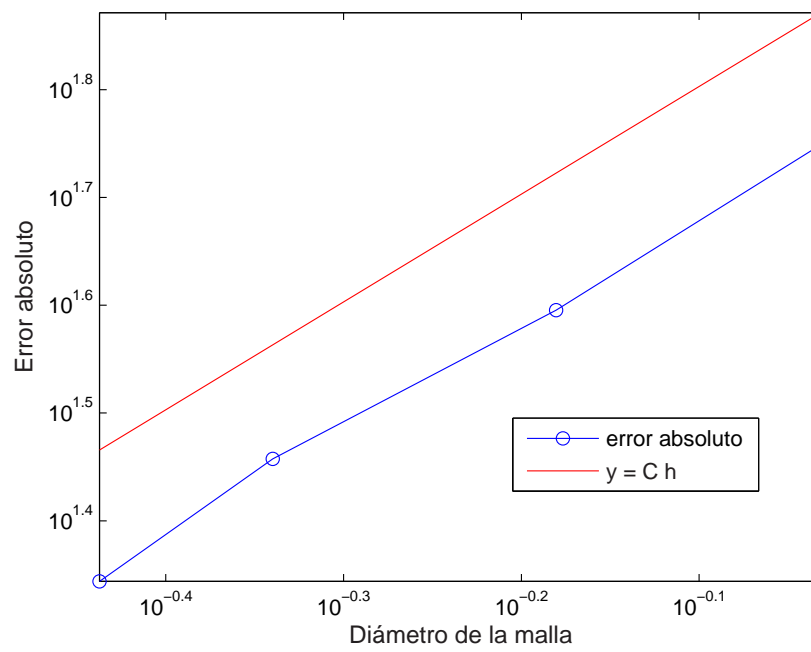


Figura 4.2: Error absoluto para \mathbf{h}_h en $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega_c)$ vs. h (escala logarítmica)

Capítulo 5

Eddy currents de evolución

En este capítulo estudiamos el problema de *eddy currents* de evolución (1.1.1–1.1.3) bajo las condiciones de compatibilidad (1.1.7). Para ello, utilizamos una estrategia análoga a la del Capítulo 4.

Más concretamente, suponemos que \mathbf{J} y $\operatorname{div} \mathbf{H}_0$ tienen soporte compacto. Entonces podemos introducir un dominio computacional Ω conexo y simplemente conexo tal que

$$\overline{\Omega}_c \subset \Omega, \quad \operatorname{soporte}(\mathbf{J}) \subset [0, T] \times \overline{\Omega} \quad \text{y} \quad \operatorname{soporte}(\operatorname{div} \mathbf{H}_0) \subset \overline{\Omega}.$$

Además, tomamos Ω de forma que su frontera $\Gamma := \partial\Omega$ sea conexa, simplemente conexa y Lipschitz continua.

Subdividimos el dieléctrico Ω_c^e en el dominio acotado $\Omega_d := \Omega \setminus \overline{\Omega}_c$ y la región no acotada $\Omega^e := \mathbb{R}^3 \setminus \overline{\Omega}$; véase la Figura 4.1.

Es importante señalar que los campos involucrados en el problema de evolución (1.1.1–1.1.3) son reales, a diferencia de lo que sucede para el problema en régimen armónico (1.2.1–1.2.2). Por lo tanto, en este capítulo trabajamos con funciones reales en vez de funciones complejas. Además, para cada función $f : (0, T) \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos

$$\begin{aligned} f(t) : \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R} \\ \mathbf{x} &\mapsto f(t)(\mathbf{x}) := f(t, \mathbf{x}). \end{aligned}$$

5.1. Formulación variacional

En este párrafo deducimos una formulación variacional del problema (1.1.1) con un razonamiento análogo al del Capítulo 4.

5.1.1. Una formulación variacional global

En primer lugar, estudiamos el espacio funcional en el que buscaremos el campo magnético \mathbf{H} . Con este fin, notamos que, según la primera ecuación de (1.1.1),

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{J}(t, \mathbf{x}) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega^e.$$

Además, tomando el operador divergencia en la segunda ecuación de (1.1.1) y utilizando la hipótesis (1.1.5),

$$\partial_t(\operatorname{div} \mathbf{H}(t, \mathbf{x})) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega^e.$$

Recordemos que hemos introducido el dominio computacional $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ de modo que $\mathbf{J}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0}$ en $(0, T) \times \Omega^e$ y $\operatorname{div} \mathbf{H}(0, \mathbf{x}) = \operatorname{div} \mathbf{H}_0 = 0$ en Ω^e , luego

$$\mathbf{rot} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad \text{y} \quad \operatorname{div} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = 0 \quad \text{en } (0, T) \times \Omega^e.$$

Partiendo de esta propiedad junto con la condición asintótica (1.1.3) y aplicando la tercera identidad de (2.0.1), deducimos que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = \mathbf{0} & \text{en } (0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_R), \\ \operatorname{div} \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = 0 & \text{en } (0, T) \times (\mathbb{R}^3 \setminus B_R), \\ \mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|}\right) & \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty, \end{array} \right.$$

siendo B_R una bola centrada en el origen con radio R suficientemente grande y donde el comportamiento asintótico es uniforme en casi todas las direcciones $(t, \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|})$ (con $t \in (0, T)$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$). En esta situación, en [6, Proposición 3.1] se hace una expansión del campo $\mathbf{H}(t)$ en polinomios esféricos armónicos para mostrar que

$$\mathbf{H}(t, \mathbf{x}) = O\left(\frac{1}{|\mathbf{x}|^2}\right) \quad \text{uniformemente cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty.$$

En particular, tenemos que $\mathbf{H}(t) \in \mathbf{L}^2(\mathbb{R}^3)$ en c.t.p. $t \in (0, T)$. Teniendo en cuenta esta propiedad, así como la primera ecuación de (1.1.1) y el Lema 4.1.3, buscaremos el campo magnético $\mathbf{H}(t)$ en el espacio afín $\mathcal{M}(\mathbf{J}(t)|_{\Omega_d}) + \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ en c.t.p. $t \in (0, T)$. En lo que sigue, denotamos por simplicidad $\mathbf{J}_d := \mathbf{J}|_{(0, T) \times \Omega_d}$ y $\mathcal{M}\mathbf{J}_d(t) := \mathcal{M}(\mathbf{J}_d(t))$ en c.t.p. $t \in (0, T)$.

Para deducir una formulación variacional del problema (1.1.1–1.1.3), testeamos la segunda ecuación de (1.1.1) con una función $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ e integramos por partes con la fórmula (2.3.3):

$$\frac{d}{dt}(\mu\mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + (\mathbf{E}(t), \mathbf{rot} \mathbf{q})_{0, \Omega_c} = 0 \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T). \quad (5.1.1)$$

Según la primera ecuación de (1.1.1),

$$\mathbf{E} = \frac{1}{\sigma}(\mathbf{rot} \mathbf{H} - \mathbf{J}_c) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega_c,$$

donde denotamos $\mathbf{J}_c := \mathbf{J}|_{(0, T) \times \Omega_c}$. Así que podemos eliminar el campo eléctrico de (5.1.1) como sigue:

$$\frac{d}{dt}(\mu\mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}) \quad \text{en } \mathcal{D}'(0, T),$$

siendo

$$c(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) := \left(\frac{1}{\sigma(t)} \mathbf{rot} \mathbf{q}_1, \mathbf{rot} \mathbf{q}_2\right)_{0, \Omega_c} \quad \text{y} \quad l(t, \mathbf{q}) := \left(\frac{1}{\sigma(t)} \mathbf{J}_c(t), \mathbf{rot} \mathbf{q}\right)_{0, \Omega_c},$$

para cualesquiera funciones $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$.

Introducimos el espacio

$$W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3)),$$

que consta de las funciones $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$ con $\partial_t \mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$.

Entonces proponemos la siguiente formulación débil del problema de *eddy currents* de evolución (1.1.1–1.1.3).

Problema 5.1.1 Buscar $\mathbf{H} \in \mathcal{M}\mathbf{J}_d + W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$ tal que

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0,$$

y que satisfaga la siguiente ecuación en $\mathcal{D}'(0, T)$:

$$\frac{d}{dt}(\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3).$$

Nótese que la condición inicial del problema anterior tiene sentido siempre que \mathbf{J}_d sea suficientemente regular. De hecho, el Lema 4.1.1 junto con [58, Teorema 41.15] garantizan que el espacio $W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$ se incluye con continuidad en $\mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{U}_0(\mathbb{R}^3))$.

Teorema 5.1.1. *Supongamos que la densidad de corriente $\mathbf{J} \in \mathbf{L}^2((0, T) \times \mathbb{R}^3)$ presenta la regularidad $\mathbf{J}_d \in H^1((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$ y que el campo magnético inicial $\mathbf{H}_0 \in \mathbf{U}(\mathbb{R}^3)$ satisface la condición de compatibilidad $\mathbf{rot} \mathbf{H}_0|_{\Omega_d} = \mathbf{J}_d(0)$. Entonces el Problema 5.1.1 tiene una solución $\mathbf{H} \in \mathcal{M}\mathbf{J}_d + W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$, que es única y se caracteriza por*

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mu \mathbf{H}(t), \partial_t \mathbf{q}(t))_{0, \mathbb{R}^3} dt + \int_0^T c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}(t)) dt = \\ = (\mu \mathbf{H}_0, \mathbf{q}(0))_{0, \mathbb{R}^3} + \int_0^T l(t, \mathbf{q}(t)) dt, \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

para cada $\mathbf{q} \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$ con $\mathbf{q}(T) = \mathbf{0}$.

Demostración. Introducimos la variable auxiliar $\mathbf{H}^* := \mathbf{H} - \mathcal{M}\mathbf{J}_d$ y reescribimos el Problema 5.1.1 en términos de esta nueva incógnita.

Con este fin, notamos que la hipótesis de regularidad $\mathbf{J}_d \in H^1((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$ junto con el Lema 4.1.2 implican que $\partial_t \mathcal{E}(\mathbf{J}_d(t)) = \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{J}_d(t))$ en c.t.p. $t \in (0, T)$. Luego

$$\partial_t(\mathcal{M}\mathbf{J}_d(t)) = \partial_t(\Phi * \mathcal{E}(\mathbf{J}_d(t))) = \Phi * \mathcal{E}(\partial_t \mathbf{J}_d(t)) = \mathcal{M}(\partial_t \mathbf{J}_d(t)) \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3),$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$ y, aplicando el Lema 4.1.3, resulta que $\mathcal{M}\mathbf{J}_d \in H^1(0, T; \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$. Como consecuencia de esta propiedad, deducimos que el operador

$$l^*(t, \mathbf{q}) := l(t, \mathbf{q}) - (\mu \partial_t(\mathcal{M}\mathbf{J}_d(t)), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} - c(t, \mathcal{M}\mathbf{J}_d(t), \mathbf{q})$$

pertenece al espacio $L^2((0, T); \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$. También deducimos que tiene sentido evaluar $\mathcal{M}\mathbf{J}_d(t)$ en $t = 0$, porque el espacio $H^1((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3))$ se incluye con continuidad en $C^0([0, T]; \mathbf{X}(\mathbb{R}^3) \cap \mathbf{H}^1(\mathbb{R}^3))$; cf. [58, Teorema 41.15].

Estas propiedades nos permiten reescribir el Problema 5.1.1 como

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{buscar } \mathbf{H}^* \in W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3)) \text{ tal que} \\ \mathbf{H}^*(0) = \mathbf{H}_0 - \mathcal{M}\mathbf{J}_d(0), \\ \text{y que satisface la siguiente ecuación en } \mathcal{D}'(0, T) : \\ \frac{d}{dt}(\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(t, \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = l^*(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3). \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

Nótese que la forma bilineal

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3) &\rightarrow \mathbb{R} \\ (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &\mapsto c(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) \end{aligned}$$

está acotada y es coerciva uniformemente con respecto a $t \in (0, T)$:

$$\begin{aligned} c(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &= \left(\frac{1}{\sigma(t)} \mathbf{rot} \mathbf{q}_1, \mathbf{rot} \mathbf{q}_2 \right)_{0, \Omega_c} \leq \frac{1}{\sigma_0} \|\mathbf{q}_1\|_{\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3} \|\mathbf{q}_2\|_{\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3}, \\ c(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}) &= \left(\frac{1}{\sigma(t)} \mathbf{rot} \mathbf{q}, \mathbf{rot} \mathbf{q} \right)_{0, \Omega_c} \geq \frac{1}{\sigma_1} \left(\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \mathbb{R}^3}^2 - \|\mathbf{q}\|_{0, \mathbb{R}^3}^2 \right), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$ y en c.t.p. $t \in (0, T)$. En estas condiciones, [57, Teorema 23A] garantiza que el problema (5.1.3) está bien planteado.

Finalmente, concluimos notando que (5.1.3) es equivalente al Problema 5.1.2. ■

5.1.2. Una formulación variacional mixta

Siguiendo la estrategia del Párrafo 4.2.2, en este apartado imponemos la restricción $\mathbf{rot} \mathbf{H}|_{(0,T) \times \Omega_d} = \mathbf{J}_d$ introduciendo un multiplicador de Lagrange. Con este fin, definimos $\Upsilon : L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)) \rightarrow L^2((0, T); \mathbf{M}'(\Omega_d))$ tal que

$$\int_0^T \langle \Upsilon \mathbf{q}(t), \mathbf{m}(t) \rangle_{\mathbf{M}'(\Omega_d) \times \mathbf{M}(\Omega_d)} dt = \int_0^T d(\mathbf{m}(t), \mathbf{q}(t)) dt,$$

para cualesquiera $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$ y $\mathbf{m} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$. Nótese que este operador está acotado; en efecto, para cada $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$,

$$\|\Upsilon \mathbf{q}\|_{L^2((0,T); \mathbf{M}'(\Omega_d))}^2 = \int_0^T \left(\sup_{\mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d), \mathbf{m} \neq \mathbf{0}} \frac{d(\mathbf{m}, \mathbf{q}(t))}{\|\mathbf{m}\|_{0, \Omega_d}} \right)^2 dt \leq \int_0^T \|\mathbf{rot} \mathbf{q}(t)\|_{0, \Omega_d}^2 dt.$$

Denotamos su dual por $\Upsilon^* : L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)) \rightarrow L^2((0, T); \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3))$; es decir,

$$\int_0^T \langle \Upsilon^* \mathbf{m}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} dt = \int_0^T d(\mathbf{m}(t), \mathbf{q}(t)) dt,$$

para cualesquiera $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$ y $\mathbf{m} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$. Razonando como en el Lema 4.2.2, deducimos el siguiente resultado.

Lema 5.1.2. *El operador lineal*

$$\Upsilon^* : L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)) \rightarrow L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))^0$$

define un isomorfismo, donde $L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))^0$ representa el espacio de las funciones $\mathcal{L} \in L^2((0, T); \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3))$ tales que

$$\int_0^T \langle \mathcal{L}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} dt = 0$$

para cada $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$.

Problema 5.1.2 Buscar

$$\mathbf{H} \in W^1((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3)) \quad \text{y} \quad \mathbf{r} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$$

tales que

$$\mathbf{H}(0) = \mathbf{H}_0,$$

y que cumplan las siguientes ecuaciones en $\mathcal{D}'(0, T)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left((\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) \right) + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) &= l(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \\ d(\mathbf{m}, \mathbf{H}(t)) &= (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d). \end{aligned}$$

Teorema 5.1.3. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.1.1, el Problema 5.1.2 tiene una única solución.*

Demostración. La segunda ecuación variacional del Problema 5.1.2 significa que

$$\text{rot } \mathbf{H}(t)|_{\Omega_d} = \mathbf{J}_d(t) \quad \text{en c.t.p. } t \in (0, T),$$

luego $\mathbf{H} \in \mathcal{M}\mathbf{J}_d + W^1((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'_0(\mathbb{R}^3))$. Entonces, teniendo en cuenta la condición inicial junto con la primera ecuación variacional del Problema 5.1.2 para funciones $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3)$, deducimos que \mathbf{H} coincide con la única solución del Problema 5.1.1.

Para estudiar la existencia y unicidad del multiplicador de Lagrange \mathbf{r} asociado al Problema 5.1.2, introducimos $\mathcal{G} \in L^2((0, T); \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3))$ definida por

$$\begin{aligned} \int_0^T \langle \mathcal{G}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} dt &:= \\ &= - \int_0^T \left((\mu \mathbf{H}(t) - \mu \mathbf{H}_0, \mathbf{q}(t))_{0, \mathbb{R}^3} + \hat{c}(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}(t)) - \langle \hat{\ell}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} \right) dt, \end{aligned}$$

para cada $\mathbf{q} \in L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$. Aquí hemos denotado

$$\hat{c}(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}(t)) := \int_0^t c(s, \mathbf{H}(s), \mathbf{q}(t)) ds \quad \text{y} \quad \hat{\ell}(t) := \int_0^t \ell(s) ds,$$

donde $\ell \in L^2((0, T); \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3))$ se caracteriza por

$$\int_0^T \langle \ell(t), \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} dt := \int_0^T l(t, \mathbf{q}) dt \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3).$$

Dados $\mathbf{q} \in \mathcal{D}((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$ y $\mathbf{m} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$, consideramos

$$\check{\mathbf{q}}(t) := \int_t^T \mathbf{q}(s) ds \quad \text{y} \quad \hat{\mathbf{m}}(t) := \int_0^t \mathbf{m}(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

Observemos que, aplicando el Lema 2.8.1,

$$\begin{aligned} \int_0^T d(\mathbf{m}(t), \check{\mathbf{q}}(t)) dt &= \int_0^T \left(\int_t^T d(\mathbf{m}(t), \mathbf{q}(s)) ds \right) dt = \int_0^T \left(\int_0^s d(\mathbf{m}(t), \mathbf{q}(s)) dt \right) ds = \\ &= \int_0^T d(\hat{\mathbf{m}}(t), \mathbf{q}(t)) dt = 0 \quad \forall \mathbf{m} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)). \end{aligned}$$

En consecuencia $\check{\mathbf{q}} \in \mathcal{C}^\infty([0, T]; \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$ y, puesto que $\check{\mathbf{q}}(T) = \mathbf{0}$, la ecuación (5.1.2) garantiza que

$$\begin{aligned} - \int_0^T (\mu \mathbf{H}(t), \partial_t \check{\mathbf{q}}(t))_{0, \mathbb{R}^3} dt + \int_0^T c(t, \mathbf{H}(t), \check{\mathbf{q}}(t)) dt = \\ = (\mu \mathbf{H}_0, \check{\mathbf{q}}(0))_{0, \mathbb{R}^3} + \int_0^T l(t, \check{\mathbf{q}}(t)) dt. \end{aligned}$$

Utilizando la definición de $\check{\mathbf{q}}$ y el Lema 2.8.1, reescribimos esta ecuación como

$$\int_0^T \left((\mu \mathbf{H}(t) - \mu \mathbf{H}_0, \mathbf{q}(t))_{0, \mathbb{R}^3} + \hat{c}(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}(t)) - \langle \hat{\ell}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} \right) dt = 0,$$

o equivalentemente,

$$\int_0^T \langle \mathcal{G}(t), \mathbf{q}(t) \rangle_{\mathbf{X}'(\mathbb{R}^3) \times \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)} dt = 0.$$

Esta propiedad, junto con la densidad de $\mathcal{D}((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$ en $L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))$, garantiza que $\mathcal{G} \in L^2((0, T); \mathbf{X}_0(\mathbb{R}^3))^0$. Luego, en virtud del Lema 5.1.2, existe una única función $\mathbf{r} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$ con

$$\Upsilon^* \mathbf{r}(t) = \mathcal{G}(t). \quad (5.1.4)$$

Concluimos notando que $\mathbf{r} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$ satisface la primera ecuación variacional del Problema 5.1.2. En efecto, consideramos $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ y $\varphi \in \mathcal{D}(0, T)$;

tomando el producto de dualidad de (5.1.4) con $\mathbf{q}(\mathbf{x}) \frac{d\varphi}{dt}(t) \in L^2((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3))$, y utilizando que $\frac{d}{dt}\hat{c}(t, \hat{\mathbf{H}}(t), \mathbf{q}) = c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q})$ y $\frac{d}{dt}\hat{\ell}(t) = \ell(t)$, resulta que

$$\begin{aligned} & \left\langle \frac{d}{dt}d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T) \times \mathcal{D}(0,T)} = \\ & = \left\langle \frac{d}{dt}(\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) + \ell(t, \mathbf{q}), \varphi \right\rangle_{\mathcal{D}'(0,T) \times \mathcal{D}(0,T)}, \end{aligned}$$

que es la primera ecuación variacional del Problema 5.1.2 en el sentido de $\mathcal{D}'(0, T)$. ■

5.1.3. Una formulación variacional BEM–FEM

Definimos las formas bilineales

$$\begin{aligned} a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) &:= (\mu \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2)_{0, \Omega} + \mu_0 \langle \gamma_\tau \mathbf{q}_2, \mathcal{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{q}_1) \rangle_{\tau, \Gamma}, \\ a(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2) &:= a_0(\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) + \mu_0 \left(\langle \eta_2, \mathcal{V} \eta_1 \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \eta_2, \mathcal{B} \mathbf{q}_1 \rangle_{1/2, \Gamma} - \langle \eta_1, \mathcal{B} \mathbf{q}_2 \rangle_{1/2, \Gamma} \right), \end{aligned}$$

para cualesquiera $\hat{\mathbf{q}}_1 := (\mathbf{q}_1, \eta_1)$ y $\hat{\mathbf{q}}_2 := (\mathbf{q}_2, \eta_2)$ en $\hat{\mathbf{X}}(\Omega)$. Nótese que, bajo la hipótesis (1.1.5) sobre el coeficiente μ , los Teoremas 2.7.5 y 2.7.6 y la propiedad (4.2.6) garantizan que

$$\begin{aligned} |a(\hat{\mathbf{q}}_1, \hat{\mathbf{q}}_2)| &\leq C_1 \left(\|\mathbf{q}_1\|_{0, \Omega} \|\mathbf{q}_2\|_{0, \Omega} + \|\gamma_\tau \mathbf{q}_1\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_2\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \right. \\ &\quad + \|\eta_1\|_{-1/2, \Gamma} \|\eta_2\|_{-1/2, \Gamma} + \|\eta_2\|_{-1/2, \Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_1\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \\ &\quad \left. + \|\eta_1\|_{-1/2, \Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{q}_2\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \right), \quad (5.1.5) \end{aligned}$$

y que además $a(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) \in \mathbb{R}$ con

$$a(\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{q}}) \geq C_2 \left(\|\mathbf{q}\|_{0, \Omega}^2 + \|\gamma_\tau \mathbf{q}\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\eta\|_{-1/2, \Gamma}^2 \right), \quad (5.1.6)$$

para cualesquiera $\widehat{\mathbf{q}}_1 := (\mathbf{q}_1, \eta_1)$, $\widehat{\mathbf{q}}_2 := (\mathbf{q}_2, \eta_2)$ y $\widehat{\mathbf{q}} = (\mathbf{q}, \eta)$ en $\widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$.

Sea $\widehat{\mathbf{H}}_0 = (\mathbf{H}_0|_\Omega, \gamma_n^{ext} \mathbf{H}_0)$, donde $\mathbf{H}_0 \in \mathbf{U}(\mathbb{R}^3)$ representa el campo magnético inicial. Entonces proponemos la siguiente formulación variacional BEM–FEM del problema (1.1.1–1.1.3).

Problema 5.1.3 Buscar

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}} &:= (\mathbf{H}, \lambda) \in L^2((0, T); \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma)), \\ \mathbf{r} &\in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)), \end{aligned}$$

tales que

$$\widehat{\mathbf{H}}(0) = \widehat{\mathbf{H}}_0,$$

y que satisfagan las siguientes ecuaciones en $\mathcal{D}'(0, T)$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a(\widehat{\mathbf{H}}(t), \widehat{\mathbf{q}}) + d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) \right) + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) &= l(t, \mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega), \\ d(\mathbf{m}, \mathbf{H}(t)) &= (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d). \end{aligned}$$

Teorema 5.1.4. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.1.1, el Problema 5.1.3 tiene una única solución. Además, se relaciona con la solución \mathbf{H} del Problema 5.1.2 a través de la relación $\widehat{\mathbf{H}} := (\mathbf{H}|_\Omega, \gamma_n^{ext} \mathbf{H})$ y el multiplicador de Lagrange \mathbf{r} es el mismo para ambos problemas.*

Demostración. Sea $\mathbf{H} \in W^1((0, T); \mathbf{X}(\mathbb{R}^3), \mathbf{X}'(\mathbb{R}^3))$, $\mathbf{r} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d))$ la solución del Problema 5.1.2. Definimos $\widehat{\mathbf{H}}^* := (\mathbf{H}^*, \lambda)$, donde $\mathbf{H}^*(t) := \mathbf{H}(t)|_\Omega$ y $\lambda(t) := \gamma_n^{ext} \mathbf{H}(t)$. Entonces

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}^* &\in L^2((0, T); \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma)), \\ \mathbf{r} &\in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)) \end{aligned}$$

es una solución del Problema 5.1.3.

En efecto, utilizando la condición inicial del Problema 5.1.2, tenemos que

$$\mathbf{H}^*(0) = \mathbf{H}(0)|_\Omega = \mathbf{H}_0|_\Omega \quad \text{y} \quad \lambda(0) = \gamma_n^{ext} \mathbf{H}(0) = \gamma_n^{ext} \mathbf{H}_0.$$

Además, aplicando la segunda ecuación del Problema 5.1.2,

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{H}^*(t)) = d(\mathbf{m}, \mathbf{H}(t)) = (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d).$$

Por tanto lo que tenemos que estudiar es si $\widehat{\mathbf{H}}^*$ y \mathbf{r} satisface la primera ecuación del Problema 5.1.3.

Para ello, consideramos el potencial $\psi \in L^2((0, T); W^1(\Omega^e))$ asociado a la función $\mathbf{H}(t) \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ en c.t.p. $t \in (0, T)$ como en el Lema 4.2.4. Análogamente, introducimos el potencial $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ correspondiente a una función genérica $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$. Recordemos que $\psi(t) \in W^1(\Omega^e)$ es armónico y que

$$\gamma_\tau \mathbf{H}^*(t) = \mathbf{rot}_\Gamma \psi(t), \quad (5.1.7)$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. En consecuencia, definiendo $\lambda(t) := \gamma_{\mathbf{n}}^{ext} \mathbf{H}(t) = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{n}}(t)$ y utilizando las propiedades (2.7.8), resulta que

$$\mathcal{V}(\lambda(t)) + \mathcal{B}(\mathbf{H}^*(t)) = 0 \quad y \quad \lambda(t) = -\mathcal{N}(\gamma \psi(t)) + \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*\right)(\lambda(t)) \quad (5.1.8)$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Ahora, integramos por partes en

$$(\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 (\nabla \psi(t), \nabla \varphi)_{0, \Omega^e},$$

de modo que

$$(\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \Omega} - \mu_0 \langle \lambda(t), \gamma \varphi \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Combinando esta ecuación con la segunda de (5.1.8) y con (2.7.7),

$$\begin{aligned} (\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} &= (\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \Omega} \\ &\quad + \mu_0 \langle \mathbf{rot}_\Gamma \varphi, \mathbf{V}_\tau(\mathbf{rot}_\Gamma \psi(t)) \rangle_{\tau, \Gamma} - \mu_0 \langle \lambda(t), \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right) \gamma \varphi \rangle_{1/2, \Gamma}. \end{aligned}$$

Aplicando la propiedad (5.1.7),

$$(\mu \mathbf{H}(t), \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = (\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 \langle \gamma_\tau \mathbf{q}, \mathbf{V}_\tau(\gamma_\tau \mathbf{H}^*(t)) \rangle_{\tau, \Gamma} - \mu_0 \langle \lambda(t), \mathcal{B} \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma}.$$

Añadimos a esta ecuación la siguiente versión de la primera identidad de (5.1.8):

$$\mu_0 \left(\langle \eta, \mathcal{V}(\lambda(t)) \rangle_{1/2, \Gamma} + \langle \eta, \mathcal{B}(\mathbf{H}^*(t)) \rangle_{1/2, \Gamma} \right) = 0 \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2}(\Gamma),$$

y así obtenemos que

$$(\mu \mathbf{H}(t), \mathcal{R}^{-1} \mathbf{q})_{0, \mathbb{R}^3} = a(\widehat{\mathbf{H}}^*(t), \widehat{\mathbf{q}}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega),$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Por lo tanto, la primera ecuación del Problema 5.1.2 garantiza que se cumple la siguiente identidad en $\mathcal{D}'((0, T))$:

$$\frac{d}{dt} \left(a(\widehat{\mathbf{H}}^*(t), \widehat{\mathbf{q}}) + d(\mathbf{q}, \mathbf{r}(t)) \right) + c(t, \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega),$$

que es la primera ecuación del Problema 5.1.3.

Nos resta estudiar la unicidad de solución del Problema 5.1.3. Con este fin, consideramos

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{H}}^* &= (\mathbf{H}^*, \lambda) \in L^2((0, T); \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)) \cap \mathcal{C}^0([0, T]; \mathbf{L}^2(\Omega) \times H_0^{-1/2}(\Gamma)), \\ \mathbf{r} &\in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d)) \end{aligned}$$

que sea una solución del Problema 5.1.3 homogéneo. A partir de la primera ecuación del Problema 5.1.3 para funciones de la forma $\widehat{\mathbf{q}} = (0, \eta) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$, deducimos que $\lambda(t) = -\mathcal{V}^{-1} \mathcal{B}(\mathbf{H}^*(t))$ en c.t.p. $t \in (0, T)$. También, a partir de dicha ecuación para funciones de la forma $\widehat{\mathbf{q}} := (\mathbf{q}, 0) \in \widehat{\mathbf{X}}(\Omega)$ y eliminando la incógnita λ con la expresión anterior, tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0, \Omega} + \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\langle \gamma_{\tau} \mathbf{q}, \mathcal{V}_{\tau}(\gamma_{\tau} \mathbf{H}^*(t)) \rangle_{\tau, \Gamma} + \langle \mathcal{V}^{-1} \mathcal{B}(\mathbf{H}^*(t)), \mathcal{B} \mathbf{q} \rangle_{1/2, \Gamma} \right) \\ + \frac{d}{dt} d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) + c(t, \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = 0, \end{aligned}$$

en $\mathcal{D}'((0, T))$ y para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$. Denotamos por $\psi \in L^2((0, T); W^1(\Omega^e))$ el potencial asociado a la función $\mathbf{H}^*(t) \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$ en c.t.p. $t \in (0, T)$ como en el Lema 4.2.4. Análogamente, $\varphi \in W^1(\Omega^e)$ representa el potencial correspondiente

a una función genérica $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\mathbb{R}^3)$. Utilizando que $\psi(t)$ satisface (5.1.7) y (5.1.8), reescribimos la ecuación anterior como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0,\Omega} + \mu_0 \frac{d}{dt} \left(\langle \mathcal{N}(\gamma\psi(t)), \gamma\varphi \rangle_{\Gamma} - \langle (\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}^*)(\frac{\partial\psi}{\partial\mathbf{n}}(t)), \gamma\varphi \rangle_{1/2,\Gamma} \right) + \\ + \frac{d}{dt}d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) + c(t, \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = 0, \end{aligned}$$

en $\mathcal{D}'((0, T))$ y para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$. Aplicando las identidades (5.1.8) e integrando por partes, tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left((\mu \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0,\Omega} + \mu_0 (\nabla\psi(t), \nabla\varphi)_{0,\Omega_e} + d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) \right) + c(t, \mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = 0,$$

en $\mathcal{D}'((0, T))$ y para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$. Es decir,

$$\frac{d}{dt} \left((\mu \mathcal{R}^{-1}\mathbf{H}^*(t), \mathbf{q})_{0,\mathbb{R}^3} + d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) \right) + c(t, \mathcal{R}^{-1}\mathbf{H}^*(t), \mathbf{q}) = 0,$$

en $\mathcal{D}'((0, T))$ y para todo $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$. Esta ecuación, junto con la condición inicial y la segunda identidad del Problema 5.1.3, garantizan que $(\mathcal{R}^{-1}\mathbf{H}^*, \mathbf{r})$ es solución del Problema 5.1.2 homogéneo y, en consecuencia, es idénticamente nula.

Por lo tanto, el Problema 5.1.3 homogéneo sólo admite la solución trivial; así que, por superposición, concluimos que el Problema 5.1.3 admite a lo sumo una solución. ■

Reescribimos el Problema 5.1.3 como

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{A} & -\mu_0 \mathcal{B}^* & \mathcal{D}^* \\ \mu_0 \mathcal{B} & \mu_0 \mathcal{V} & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(t) \\ \lambda(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ 0 & 0 & 0 \\ \mathcal{D} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(t) \\ \lambda(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ell(t) \\ 0 \\ \ell_d(t) \end{pmatrix}, \quad (5.1.9)$$

donde utilizamos la notación del Párrafo 4.2.3 y además

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}(t)\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \rangle_{\mathbf{X}'(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega)} &:= c(t, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2) & \forall \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2 \in \mathbf{X}(\Omega), \\ \langle \ell(t), \mathbf{q} \rangle_{\mathbf{X}'(\Omega) \times \mathbf{X}(\Omega)} &:= l(t, \mathbf{q}) & \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega), \\ \langle \ell_d(t), \mathbf{m} \rangle_{\mathbf{M}'(\Omega_d) \times \mathbf{M}(\Omega_d)} &:= (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0,\Omega_d} & \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}(\Omega_d). \end{aligned}$$

Dado que $\lambda(t) = -\mathcal{V}^{-1}\mathcal{B}(\mathbf{H}(t))$ en c.t.p. $t \in (0, T)$, podemos eliminar la incógnita λ del sistema (5.1.9). Así obtenemos el sistema reducido

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mu_0 \mathcal{B}^* \mathcal{V}^{-1} \mathcal{B} & \mathcal{D}^* \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}(t) & \mathbf{0} \\ \mathcal{D} & \mathbf{0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}(t) \\ \mathbf{r}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\ell}(t) \\ \boldsymbol{\ell}_d(t) \end{pmatrix}. \quad (5.1.10)$$

5.2. Esquema semidiscreto

En lo que sigue, suponemos que Ω y Ω_c son poliedros de Lipschitz y utilizamos los espacios discretos introducidos en la Sección 4.3.

5.2.1. Descripción y análisis del problema semidiscreto

Proponemos la siguiente versión semidiscreta del Problema 5.1.3.

Problema 5.2.1 Buscar

$$\widehat{\mathbf{H}}_h(t) := (\mathbf{H}_h(t), \lambda_h(t)) \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathbf{r}_h(t) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$$

tales que

$$\widehat{\mathbf{H}}_h(0) \approx \widehat{\mathbf{H}}_0,$$

y que satisfagan las siguientes ecuaciones en todo $t \in (0, T]$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(a(\widehat{\mathbf{H}}_h(t), \widehat{\mathbf{q}}) + d(\mathbf{r}_h(t), \mathbf{q}) \right) + c(t, \mathbf{H}_h(t), \mathbf{q}) &= l(t, \mathbf{q}) & \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega), \\ d(\mathbf{m}, \mathbf{H}_h(t)) &= (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} & \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d). \end{aligned}$$

Teorema 5.2.1. *El Problema 5.2.1 tiene una única solución.*

Demostración. Deducimos del Lema 4.3.1 y de [29, Teorema 1.1] que para todo $t \in [0, T]$ existe algún $\mathbf{H}_h^d(t) \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ con

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{H}_h^d(t)) = (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d).$$

Introducimos $\mathbf{H}_h^*(t) := \mathbf{H}_h(t) - \mathbf{H}_h^d(t) \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y reescribimos el Problema 5.2.1 en términos de la nueva incógnita $\widehat{\mathbf{H}}_h^*(t) := (\mathbf{H}_h^*(t), \lambda_h(t))$ como

$$\frac{d}{dt}a(\widehat{\mathbf{H}}_h^*(t), \widehat{\mathbf{q}}) + c(t, \widehat{\mathbf{H}}_h^*(t), \mathbf{q}) = l^*(t, \mathbf{q}) \quad \forall \widehat{\mathbf{q}} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \times \Lambda_h(\Gamma), \quad (5.2.1)$$

para todo $t \in (0, T]$ y denotando

$$l^*(t, \mathbf{q}) := l(t, \mathbf{q}) - \frac{d}{dt}a((\mathbf{H}_h^d(t), 0), \widehat{\mathbf{q}}) - c(t, \mathbf{H}_h^d(t), \mathbf{q}).$$

La ecuación (5.2.1) es equivalente a

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \mathcal{A}_h + \mu_0 \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h & \mathbf{0} \\ \mu_0 \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h & \mu_0 \mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \mathbf{H}_h^*(t) \\ \partial_t \lambda_h(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathcal{C}_h(t) & \mathbf{0} \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{H}_h^*(t) \\ \lambda_h(t) \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} \ell_h^*(t) \\ -\mu_0 \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \partial_t \mathbf{H}_h^d(t) \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.2)$$

donde utilizamos la notación de la demostración del Teorema 4.3.2 y además

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{C}_h(t) \mathbf{q}, \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= c(t, \mathbf{q}, \mathbf{q}_h), \\ \langle \ell_h^*(t), \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)} &= l^*(t, \mathbf{q}_h) - \mu_0 \langle \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \partial_t \mathbf{H}_h^d(t), \mathbf{q}_h \rangle_{\mathbf{X}'_h(\Omega) \times \mathbf{X}_h(\Omega)}, \end{aligned}$$

para cada $t \in (0, T]$ y para cualesquiera $\mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega)$ y $\mathbf{q}_h \in \mathbf{X}_h(\Omega)$.

Recordemos que el operador $\mathcal{A}_h + \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h$ es inversible; véase la demostración del Teorema 4.3.2. Entonces la teoría clásica de sistemas lineales de ecuaciones diferenciales garantiza que existe una única función $\mathbf{H}_h^*(t) \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ solución del sistema (5.2.2). Luego existe una única función $\widehat{\mathbf{H}}_h^*(t)$ solución del Problema 5.2.1 y ésta tiene la forma

$$\mathbf{H}_h(t) = \mathbf{H}_h^d(t) + \mathbf{H}_h^*(t) \quad \text{y} \quad \lambda_h(t) = \lambda_h(0) - \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h (\mathbf{H}_h(t) - \mathbf{H}_h(0)). \quad (5.2.3)$$

Para estudiar la existencia y unicidad del multiplicador de Lagrange, introducimos el operador $\mathcal{F}_h : [0, T] \times \mathbf{X}_h(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ caracterizado por

$$\mathcal{F}_h(t, \mathbf{q}) := \int_0^t \left(l(s, \mathbf{q}) - c(s, \mathbf{H}_h(s), \mathbf{q}) \right) ds - a(\widehat{\mathbf{H}}_h(t) - \widehat{\mathbf{H}}_h(0), (\mathbf{q}, 0)). \quad (5.2.4)$$

En particular, para cada $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ tenemos que $\mathcal{F}_h(0, \mathbf{q}) = 0$ y que

$$\partial_t \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}) - \frac{d}{dt} a(\widehat{\mathbf{H}}_h(t), (\mathbf{q}, 0)) - c(t, \mathbf{H}_h(t), \mathbf{q}) = 0 \quad \forall t \in (0, T),$$

luego

$$\mathcal{F}_h(t, \mathbf{q}) = 0 \quad \forall t \in [0, T].$$

Recordando la definición del espacio $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y aplicando el Lema 4.3.1, concluimos que para cada $t \in [0, T]$ existe un único $\mathbf{r}_h(t) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ con

$$d(\mathbf{r}_h(t), \mathbf{q}) = \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega). \quad (5.2.5)$$

■

Nota 5.2.1 Como señalamos en las Notas 3.2.1 y 4.3.1, la inversa del operador tangencial \mathbf{rot}_Γ está involucrada en la definición de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y, en consecuencia, nuestro método numérico parece difícil de implementar y computacionalmente costoso. De nuevo, esto no sucede en la práctica porque dicho operador puede eliminarse en el cálculo efectivo de la matriz del sistema de ecuaciones diferenciales lineales ordinarias asociado al Problema 5.2.1. Al respecto, véase el Párrafo 5.3.

5.2.2. Análisis de la convergencia

En este apartado estudiamos el orden de convergencia del esquema semidiscreto con respecto al Problema 5.1.3.

Teorema 5.2.2. *Sean \mathbf{H} y \mathbf{H}_h las primeras componentes de las soluciones de los Problemas 5.1.3 y 5.2.1, respectivamente. Supongamos que \mathbf{H} pertenece al espacio $\mathcal{C}^1([0, T]; \mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega) \cap \mathbf{X}(\Omega))$ para algún $s > 1/2$ y que $\mathbf{H}_h(0) = \mathcal{I}_h \mathbf{H}(0)$. Entonces tenemos la siguiente estimación de error:*

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0, \Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\gamma_\tau(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{H} - \mathbf{H}_h\|_{\mathbf{rot}, \Omega_c}^2 dt \leq \\ & \leq C h \left[\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 \right]. \end{aligned}$$

Demostración. A continuación, seguimos el razonamiento expuesto en [29, Teorema 1.1]; de hecho, esta demostración es análoga a la que hemos utilizado para probar el Teorema 4.3.4.

En primer lugar, nótese que el Lema 4.3.1 nos permite introducir una función $\mathbf{p}_h(t) \in \mathbf{X}_h(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{D}_h \mathbf{p}_h(t) = \mathcal{D}_h(\mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t)), \quad (5.2.6)$$

para todo $t \in [0, T]$. Entonces $\mathbf{H}_h^d(t) := \mathbf{p}_h(t) + \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t)$ cumple

$$d(\mathbf{m}, \mathbf{H}_h^d(t)) = (\mathbf{J}_d(t), \mathbf{m})_{0, \Omega_d} \quad \forall \mathbf{m} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d),$$

para cada $t \in [0, T]$. Descomponemos $\mathbf{H} - \mathbf{H}_h$ como $\mathbf{H} - \mathbf{H}_h = \mathbf{e}_h^1 - \mathbf{e}_h^2$, siendo

$$\mathbf{e}_h^1(t) := \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h^d(t) \in \mathbf{X}(\Omega) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_h^2(t) := \mathbf{H}_h(t) - \mathbf{H}_h^d(t) \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega),$$

para todo $t \in [0, T]$. A continuación, acotamos las normas de los campos $\mathbf{e}_h^1(t)$ y $\mathbf{e}_h^2(t)$ en el espacio $\mathbf{H}(\mathbf{rot}, \Omega)$.

Por un lado, escribiendo $\mathbf{e}_h^1(t) = \mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t) + \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h^d(t)$ y aplicando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\|\mathbf{e}_h^1(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \|\mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega}, \quad (5.2.7)$$

para todo $t \in [0, T]$. Hemos denotado por $\|d\| > 0$ la norma de la forma bilineal $d(\cdot, \cdot)$ y por $\beta > 0$ la constante que aparece en el Lema 4.3.1.

Además, bajo las hipótesis de regularidad del teorema, podemos derivar en la ecuación (5.2.6) y así obtenemos que

$$\mathcal{D}_h(\partial_t \mathbf{p}_h(t)) = \mathcal{D}_h(\partial_t \mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \partial_t \mathbf{H}(t)) \quad \forall t \in [0, T].$$

Luego con un razonamiento análogo al anterior tenemos que $\partial_t \mathbf{e}_h^1(t)$ cumple estimación

$$\|\partial_t \mathbf{e}_h^1(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \|\partial_t \mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \partial_t \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega}, \quad (5.2.8)$$

en todo $t \in [0, T]$.

Por otro lado, la primera ecuación del sistema (5.1.10) garantiza que

$$a_0(\partial_t \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) + \mu_0 \langle \rho(\partial_t \mathbf{H}(t)), \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_\Gamma + c(t, \mathbf{H}(t), \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}).$$

para cada función $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_0(\Omega)$ y todo $t \in (0, T)$. Análogamente, la primera ecuación de (5.2.2) garantiza que

$$a_0(\partial_t \mathbf{H}_h(t), \mathbf{q}) + \mu_0 \langle \rho_h(\partial_t \mathbf{H}_h(t)), \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_\Gamma + c(t, \mathbf{H}_h(t), \mathbf{q}) = l(t, \mathbf{q}),$$

para cada función $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y todo $t \in (0, T)$. Dado que $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega) \subset \mathbf{X}_0(\Omega)$, deducimos de las dos últimas identidades que

$$\begin{aligned} a_0(\partial_t \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{q}) + c(t, \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{q}) + \mu_0 \langle \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \partial_t \mathbf{e}_h^2(t), \mathcal{B}_h \mathbf{q} \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} = \\ = a_0(\partial_t \mathbf{e}_h^1(t), \mathbf{q}) + c(t, \mathbf{e}_h^1(t), \mathbf{q}) + \\ + \mu_0 \langle \rho(\partial_t \mathbf{H}(t)) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H}(t)), \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_\Gamma + \mu_0 \langle \rho_h(\partial_t \mathbf{e}_h^1(t)), \mathcal{B}\mathbf{q} \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

para cada función $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$ y todo $t \in (0, T)$. En particular, se cumple para $\mathbf{q} := \mathbf{e}_h^2(t) \in \mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(a_0(\mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t)) + \mu_0 \langle \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t) \rangle_{\Lambda'_h(\Gamma) \times \Lambda_h(\Gamma)} \right) + \\ + c(t, \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t)) = a_0(\partial_t \mathbf{e}_h^1(t), \mathbf{e}_h^2(t)) + c(t, \mathbf{e}_h^1(t), \mathbf{e}_h^2(t)) + \\ + \mu_0 \langle \rho(\partial_t \mathbf{H}(t)) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H}(t)), \mathcal{B}\mathbf{e}_h^2(t) \rangle_\Gamma + \mu_0 \langle \rho_h(\partial_t \mathbf{e}_h^1(t)), \mathcal{B}\mathbf{e}_h^2(t) \rangle_\Gamma, \end{aligned}$$

para cada $t \in (0, T)$. Aplicando las propiedades (5.1.5), (4.2.6) y (4.3.16),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(a_0(\mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t)) + \mu_0 \langle \mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t) \rangle_{\mathbf{M}'_h(\Omega_d) \times \mathbf{M}_h(\Omega_d)} \right) + \\ + c(t, \mathbf{e}_h^2(t), \mathbf{e}_h^2(t)) \leq C_1 \left(\|\partial_t \mathbf{e}_h^1(t)\|_{0,\Omega} \|\mathbf{e}_h^2(t)\|_{0,\Omega} + \right. \\ \left. + \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^1(t)\|_{0,\Omega_c} \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^2(t)\|_{0,\Omega_c} + \|\gamma_\tau \partial_t \mathbf{e}_h^1(t)\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(t)\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} + \right. \\ \left. + \|\rho(\partial_t \mathbf{H}(t)) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H}(t))\|_{-1/2,\Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(t)\|_{\mathbf{H}_\times^{-1/2}(\Gamma)} \right). \end{aligned}$$

Si integramos esta ecuación en $(0, t) \subset (0, T)$ y utilizamos (5.1.6) junto con la no negatividad del operador $\mathcal{B}_h^* \mathcal{V}_h^{-1} \mathcal{B}_h$, resulta que

$$\begin{aligned} & \|\mathbf{e}_h^2(t)\|_{0,\Omega}^2 + \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(t)\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \frac{2}{\sigma_1} \int_0^t \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega_c}^2 ds \leq \\ & \leq 2C_1 \int_0^T \left(\|\partial_t \mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega} \|\mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega} + \|\gamma_\tau(\partial_t \mathbf{e}_h^1)\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)} \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)} + \right. \\ & \quad \left. + \|\rho(\partial_t \mathbf{H}) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H})\|_{-1/2,\Gamma} \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)} + \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega_c} \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega_c} \right) ds + \\ & \quad + \|\mathbf{e}_h^2(0)\|_{0,\Omega}^2 + \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(0)\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2. \end{aligned}$$

Razonando de forma estándar, obtenemos la siguiente cota:

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_h^2(t)\|_{0,\Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(t)\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^2\|_{0,\Omega_c}^2 ds \leq \\ & \leq C_2 \int_0^T \left(\|\partial_t \mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega}^2 + \|\gamma_\tau \partial_t \mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \|\mathbf{rot} \mathbf{e}_h^1\|_{0,\Omega_c}^2 \right) ds + \\ & \quad + C_2 \left(\int_0^T \|\rho(\partial_t \mathbf{H}) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H})\|_{-1/2,\Gamma}^2 ds + \|\mathbf{e}_h^2(0)\|_{0,\Omega}^2 + \|\gamma_\tau \mathbf{e}_h^2(0)\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 \right). \end{aligned}$$

Por lo tanto, utilizando la desigualdad triangular y el Teorema 2.3.5,

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0,\Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\gamma_\tau(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \\ & \quad + \int_0^T \|\mathbf{rot}(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{0,\Omega_c}^2 dt \leq C_3 \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot},\Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{e}_h^1\|_{\mathbf{rot},\Omega}^2 \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \|\rho(\partial_t \mathbf{H}) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H})\|_{-1/2,\Gamma}^2 dt + \|\mathbf{e}_h^1(0)\|_{\mathbf{rot},\Omega}^2 + \|\mathbf{H}(0) - \mathbf{H}_h(0)\|_{\mathbf{rot},\Omega}^2 \right). \end{aligned}$$

Luego, aplicando (5.2.7) y (5.2.8), deducimos que

$$\begin{aligned} & \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0, \Omega}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\boldsymbol{\gamma}_\tau(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)}^2 + \\ & + \int_0^T \|\mathbf{rot}(\mathbf{H} - \mathbf{H}_h)\|_{0, \Omega_c}^2 dt \leq C_4 \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega}^2 + \right. \\ & \left. + \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{H}(t) - \mathcal{I}_h \partial_t \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega}^2 + \int_0^T \|\rho(\partial_t \mathbf{H}) - \rho_h(\partial_t \mathbf{H})\|_{-1/2, \Gamma}^2 dt \right). \end{aligned}$$

Ahora concluimos utilizando el Lema 4.3.3 y la estimación del error de interpolación del Teorema 3.2.2. \blacksquare

Corolario 5.2.3. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 4.3.4 y que además $\lambda_0 = \rho_h \mathbf{H}_h(0)$. Entonces tenemos la siguiente estimación de error:*

$$\sup_{t \in [0, T]} \|\lambda(t) - \lambda_h(t)\|_{-1/2, \Gamma}^2 \leq C h \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{H}\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)}^2 \right).$$

Demostración. La primera ecuación (5.1.8) garantiza que $\lambda(t) = -\rho \mathbf{H}(t)$ en cada $t \in [0, T]$. Además, la hipótesis sobre λ_0 junto con la propiedad (5.2.3) implican que $\lambda_h(t) = -\rho_h \mathbf{H}_h(t)$ en todo $t \in [0, T]$. Entonces, aplicando la desigualdad triangular,

$$\|\lambda(t) - \lambda_h(t)\|_{-1/2, \Gamma} \leq \|\rho \mathbf{H}(t) - \rho_h \mathbf{H}(t)\|_{-1/2, \Gamma} + \|\rho_h(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{-1/2, \Gamma},$$

para cada $t \in [0, T]$. Nótese que, utilizando (4.3.16),

$$\|\rho_h(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{-1/2, \Gamma} \leq C_1 \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t)\|_{\mathbf{rot}, \Omega},$$

para todo $t \in [0, T]$. Así que el resultado es consecuencia del Lema 4.3.3 y del Teorema 5.2.2. \blacksquare

Corolario 5.2.4. *Supongamos que se cumplen las hipótesis del Teorema 5.2.2 y del Corolario 5.2.3, y que además $\mathbf{r} \in L^2((0, T); \mathbf{M}(\Omega_d) \cap \mathbf{H}^r(\Omega_d))$ para algún $r > 1/2$. Entonces tenemos la siguiente estimación del error:*

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_h(t)\|_{0, \Omega_d}^2 dt \leq \\ & \leq Ch \left(\sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{H}^s(\text{rot}, \Omega)}^2 + \sup_{t \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{H}(t)\|_{\mathbf{H}^s(\text{rot}, \Omega)}^2 + \int_0^T \|\mathbf{r}(t)\|_{r, \Omega_d}^2 dt \right). \end{aligned}$$

Demostración. Introducimos el operador continuo $\mathcal{F} : [0, T] \times \mathbf{X}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$\mathcal{F}(t, \mathbf{q}) := \int_0^t \left(l(s, \mathbf{q}) - c(t, \mathbf{h}(s), \mathbf{q}) \right) ds - a(\widehat{\mathbf{H}}(t) - \widehat{\mathbf{H}}(0), (\mathbf{q}, 0)),$$

y recordemos que definimos una versión discreta $\mathcal{F}_h : [0, T] \times \mathbf{X}_h(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ en (5.2.4). Nótese que los multiplicadores $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{M}(\Omega_d)$ y $\mathbf{r}_h(t) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ satisfacen las ecuaciones

$$\begin{aligned} d(\mathbf{r}(t), \mathbf{q}) &= \mathcal{F}(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}(\Omega), \\ d(\mathbf{r}_h(t), \mathbf{q}) &= \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \end{aligned}$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Estas propiedades sugieren introducir una función auxiliar $\tilde{\mathbf{r}}_h(t) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)$ de modo que

$$d(\tilde{\mathbf{r}}_h(t), \mathbf{q}) = \mathcal{F}(t, \mathbf{q}) \quad \forall \mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega),$$

para todo $t \in [0, T]$. En efecto, el Lema 4.3.1 garantiza que esta función existe y es única para cada $t \in [0, T]$, porque el operador $\mathcal{F}(t, \cdot) \in \mathbf{X}'(\Omega)$ se anula sobre $\mathbf{X}_0(\Omega)$ y, en particular, sobre $\mathbf{X}_{0,h}(\Omega)$.

Descomponemos $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h$ como $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h = \mathbf{e}_h^1 + \mathbf{e}_h^2$, siendo

$$\mathbf{e}_h^1(t) := \mathbf{r}(t) - \tilde{\mathbf{r}}_h(t) \quad \text{y} \quad \mathbf{e}_h^2(t) := \tilde{\mathbf{r}}_h(t) - \mathbf{r}_h(t),$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. A continuación estudiamos las normas de \mathbf{e}_h^1 y de \mathbf{e}_h^2 en $L^2((0, T); \mathbf{L}^2(\Omega_d))$.

Por un lado, utilizando el Lema 4.3.1 y la desigualdad triangular,

$$\|\mathbf{e}_h^1(t)\|_{0, \Omega_d} \leq \left(1 + \frac{\|d\|}{\beta}\right) \inf_{\mathbf{s} \in \mathbf{M}_h(\Omega_d)} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{s}\|_{0, \Omega_d},$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Además, bajo la hipótesis de regularidad sobre \mathbf{r} , tenemos que $\mathbf{r}(t) \in \mathbf{M}(\Omega_d) \cap \mathbf{H}^r(\Omega_d)$ en c.t.p. $t \in (0, T)$ y entonces la propiedad (4.3.3) y el Lema 4.1.3 implican que

$$\mathbf{rot} \mathcal{M}_h \mathbf{r}(t) = \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{rot} \mathcal{M} \mathbf{r}(t)) = \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{r}(t)) \in \mathbf{M}_h(\Omega_d),$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Luego

$$\|\mathbf{e}_h^1(t)\|_{0, \Omega_d} \leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|\mathbf{r}(t) - \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{r}(t))\|_{0, \Omega_d}, \quad (5.2.9)$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$.

Por otro lado, según el Lema 4.3.1,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h^2(t)\|_{0, \Omega_d} &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|d(\tilde{\mathbf{r}}_h(t) - \mathbf{r}_h(t), \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}} \leq \\ &\leq \frac{1}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathcal{F}(t, \mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}}, \end{aligned}$$

para todo $t \in [0, T]$. Observemos que

$$|\mathcal{F}(t, \mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q})| \leq C (\varepsilon_h^{\mathbf{H}} + \varepsilon_h^\lambda) \|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega},$$

para cualesquiera $t \in [0, T]$, $\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega)$, y donde

$$\begin{aligned} \varepsilon_h^{\mathbf{H}} &:= \sup_{t \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t)\|_{0, \Omega} + \sup_{t \in [0, T]} \|\gamma_\tau(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{\mathbf{H}_x^{-1/2}(\Gamma)} + \\ &\quad + \left(\int_0^T \|\mathbf{rot}(\mathbf{H}(t) - \mathbf{H}_h(t))\|_{0, \Omega_c}^2 dt \right)^{1/2}, \\ \varepsilon_h^\lambda &:= \sup_{t \in [0, T]} \|\lambda(t) - \lambda_h(t)\|_{-1/2, \Gamma}. \end{aligned}$$

Así que, aplicando el Teorema 5.2.2 y el Corolario 5.2.3, resulta que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{e}_h^2(t)\|_{0, \Omega_d} &\leq \frac{\|d\|}{\beta} \sup_{\mathbf{q} \in \mathbf{X}_h(\Omega), \mathbf{q} \neq \mathbf{0}} \frac{|\mathcal{F}(t, \mathbf{q}) - \mathcal{F}_h(t, \mathbf{q})|}{\|\mathbf{q}\|_{\mathbf{rot}, \Omega}} \leq \\ &\leq C_2 h^{1/2} \left(\sup_{t' \in [0, T]} (\|\mathbf{H}(t')\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} + \sup_{t' \in [0, T]} (\|\partial_t \mathbf{H}(t')\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)})) \right), \quad (5.2.10) \end{aligned}$$

para cada $t \in [0, T]$.

Finalmente, utilizando la desigualdad triangular para $\mathbf{r} - \mathbf{r}_h = \mathbf{e}_h^1 + \mathbf{e}_h^2$ junto con las cotas (5.2.9) y (5.2.10), tenemos que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{r}(t) - \mathbf{r}_h(t)\|_{0,\Omega_d} &\leq \left(1 + \frac{1}{\beta}\right) \|\mathbf{r}(t) - \mathcal{I}_h^{RT}(\mathbf{r}(t))\|_{0,\Omega_d} + \\ &\quad + C_2 h^{1/2} \left(\sup_{t' \in [0, T]} \|\mathbf{H}(t')\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} + \sup_{t' \in [0, T]} \|\partial_t \mathbf{H}(t')\|_{\mathbf{H}^s(\mathbf{rot}, \Omega)} \right), \end{aligned}$$

en c.t.p. $t \in (0, T)$. Por tanto concluimos el resultado aplicando la estimación del error de interpolación (4.3.2). ■

5.3. Forma matricial del esquema semidiscreto

El objetivo de este párrafo es reescribir el Problema semidiscreto 5.2.1 en forma matricial. Para ello utilizamos las bases de $\widehat{\mathbf{X}}_h(\Omega)$ y el sistema generador de $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$ introducidas en el Párrafo 4.4. De hecho, seguimos un razonamiento análogo al allí expuesto, si bien ahora todos los términos son reales y además la matriz C , las incógnitas y el segundo miembro dependen del tiempo.

Más concretamente, expresamos las incógnitas del Problema 5.2.1 en términos de las bases de los espacios $\mathbf{X}_h(\Omega)$ y $\Lambda_h(\Gamma)$:

$$\mathbf{H}_h(t) = \sum_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)} h_E(t) \mathbf{q}_E + \sum_{v \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}} h_v(t) \nabla \varphi_v \quad \text{y} \quad \lambda_h(t) = \sum_{F \in \mathcal{F}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}} \lambda_F(t) \rho_F;$$

y del sistema generador de $\mathbf{M}_h(\Omega_d)$:

$$\mathbf{r}_h(t) = \sum_{E \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)} r_E(t) (\mathbf{rot} \mathbf{q}_E)|_{\Omega_d}.$$

Consideramos las matrices reales

$$\begin{aligned} A_{E,E'}^\Omega &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'} \right)_{0,\Omega}, & C_{E,E'}(t) &:= \frac{1}{\mu_0} c(t, \mathbf{q}_E, \mathbf{q}_{E'}), \\ A_{E,v}^{\Omega\Gamma} &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \mathbf{q}_E, \nabla \varphi_v \right)_{0,\Omega}, & A_{v,v'}^\Gamma &:= \left(\frac{\mu}{\mu_0} \nabla \varphi_v, \nabla \varphi_{v'} \right)_{0,\Omega}, \\ R_{v,v'} &:= (\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_{v'}, \mathbf{V}_\tau(\mathbf{rot}_\Gamma \varphi_v))_{0,\Gamma}, & B_{F,v} &:= (\rho_F, \left(\frac{1}{2} \mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \gamma \varphi_v)_{0,\Gamma}, \\ & & V_{F,F'} &:= (\rho_{F'}, \mathcal{V} \rho_F)_{0,\Gamma}, \end{aligned}$$

para cualesquiera aristas interiores $E, E' \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)$; vértices sobre la frontera $v, v' \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}$ y caras de la frontera $F, F' \in \mathcal{F}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}$. Además, introducimos la matriz

$$D_{E,E'} := (\mathbf{rot} \mathbf{q}_E, \mathbf{rot} \mathbf{q}_{E'})_{0,\Omega_d},$$

para cualesquiera $E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)$ y $E' \in \mathcal{A}_h(\Omega_d)$.

Con esta notación, el Problema 5.2.1 consiste en determinar los vectores

$$\begin{aligned} \mathbf{h}^\Omega(t) &:= (h_E(t))_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)}, & \mathbf{h}^\Gamma(t) &:= (h_v(t))_{v \in \mathcal{V}_h(\Gamma) \setminus \{v_0\}}, \\ \boldsymbol{\lambda}(t) &:= (\lambda_F(t))_{F \in \mathcal{F}_h(\Gamma) \setminus \{F_0\}}, & \mathbf{r}(t) &:= (r_E(t))_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega_d)}, \end{aligned}$$

solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} A^\Omega & A^{\Omega\Gamma} & 0 & D \\ (A^{\Omega\Gamma})^\top & A^\Gamma + R & B^\top & 0 \\ 0 & B & V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^\Omega \\ \mathbf{h}^\Sigma \\ -\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ D^\top & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{h}^\Omega \\ \mathbf{h}^\Sigma \\ -\boldsymbol{\lambda} \\ \mathbf{r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{f}^\Omega \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{f}^{\Omega_d} \end{pmatrix}, \quad (5.3.1)$$

donde el término independiente viene dado por

$$\mathbf{f}^\Omega(t) := \frac{1}{\mu_0} (l(t, \mathbf{q}_E))_{E \in \mathcal{A}_h^0(\Omega)} \quad \text{y} \quad \mathbf{f}^{\Omega_d}(t) := (\mathbf{J}^d(t), \mathbf{rot} \mathbf{q}_E)_{0,\Omega_d}.$$

Apéndice A

Integración numérica

Tal y como señalamos en el Párrafo 3.3.3, a la hora de implementar efectivamente el sistema lineal (3.3.3), necesitamos estimar las integrales involucradas en el ensamblaje de la matriz y del segundo miembro del sistema. Lo mismo sucede con los sistemas (4.4.1) y (5.3.1).

En este apéndice estudiamos las integrales de contorno involucradas en el ensamblaje del sistema (3.3.3). Más concretamente, las evaluamos de forma exacta o las aproximamos numéricamente con *fórmulas de cuadratura* que diseñamos al efecto.

Por un lado, tenemos

$$B_{F,v} = \frac{1}{2} \left(\frac{(1, \varphi_v)_{0,F}}{|F|} - \frac{(1, \varphi_v)_{0,F_0}}{|F_0|} \right) - \left(\frac{(\mathcal{K}^*1, \varphi_v)_{0,F}}{|F|} - \frac{(\mathcal{K}^*1, \varphi_v)_{0,F_0}}{|F_0|} \right),$$

para cualesquiera cara $F \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\}$ y vértice $v \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}$ sobre la frontera. Nótese que podemos calcular $(1, \varphi_v)_{0,F}$ de forma exacta. Además, podemos descomponer $(\mathcal{K}^*1, \varphi_v)_{0,F}$ como

$$(\mathcal{K}^*1, \varphi_v)_{0,F} = (1, \mathcal{K}\varphi_v)_{0,F} = \sum_{F' \in \mathcal{T}_h(\Sigma)} \int_F \left(\int_{F'} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_y}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_{\mathbf{x}} \right) \varphi_v(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}}.$$

Por otro lado, tenemos

$$R_{v,v'} = \sum_{F,F' \in \mathcal{T}_h(\Sigma)} (\mathbf{rot}_\Sigma \varphi_{v'})|_F \cdot (\mathbf{rot}_\Sigma \bar{\varphi}_v)|_{F'} \int_F \int_{F'} \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

para cualesquiera vértices $v, v' \in \mathcal{V}_h(\Sigma) \setminus \{v_0\}$ sobre la frontera, y además

$$V_{F,F'} = \frac{1}{|F||F'|} \int_F \int_{F'} \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} + \frac{1}{|F_0|^2} \int_{F_0} \int_{F_0} \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} \\ - \frac{1}{|F_0||F'|} \int_{F_0} \int_{F'} \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|} - \frac{1}{|F_0||F|} \int_{F_0} \int_F \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{y}|},$$

para cualesquiera caras $F, F' \in \mathcal{T}_h(\Sigma) \setminus \{F_0\}$ sobre la frontera.

En consecuencia, para ensamblar las matrices B , R y V necesitamos aproximar integrales de la forma

$$\int_F \left(\int_{F'} \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^3} dS_{\mathbf{x}} \right) p(\mathbf{y}) dS_{\mathbf{y}} \quad \text{y} \quad \int_F \int_{F'} \frac{dS_{\mathbf{x}} dS_{\mathbf{y}}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}, \quad (\text{A.0.1})$$

para $F, F' \in \mathcal{T}_h(\Sigma)$ y donde $p \in \mathbb{P}_1(F)$. Es importante observar que estas integrales presentan singularidades cuando F y F' tienen puntos en común. Por esta razón, aproximamos las integrales (A.0.1) con fórmulas de cuadratura estándar únicamente cuando las caras F y F' estén suficientemente alejadas. En caso contrario, hacemos una *integración semianalítica*; es decir, realizamos las dos etapas siguientes:

1. En primer lugar, estudiamos las integrales interiores de (A.0.1). Si es posible, las calculamos de forma exacta. En caso contrario, eliminamos sus singularidades y entonces las aproximamos con fórmulas de cuadratura estándar.
2. En segundo lugar, estudiamos las integrales exteriores de (A.0.1). Como en el paso anterior eliminamos sus posibles singularidades, ya podemos aproximarlas utilizando la fórmula de Gauss de orden 3 para triángulos:

$$\int_F f(\mathbf{x}) dS_{\mathbf{x}} \simeq \frac{|F|}{3} (f(\mathbf{z}_1^F) + f(\mathbf{z}_2^F) + f(\mathbf{z}_3^F)) \quad \forall f \in \mathcal{C}(F),$$

con los nodos

$$\begin{cases} 6z_1^F &= 4v_1^F + v_2^F + v_3^F, \\ 6z_2^F &= v_1^F + 4v_2^F + v_3^F, \\ 6z_3^F &= v_1^F + v_2^F + 4v_3^F, \end{cases}$$

donde v_i^F ($i = 1, 2, 3$) denotan los vértices del triángulo F .

Aproximación de las integrales singulares

El objetivo de este párrafo es resolver la primera etapa del método de integración semianalítica. Es decir, estudiamos

$$I_1(\mathbf{y}) := \int_F \frac{(\mathbf{y} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_F}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|^3} dS_{\mathbf{x}} \quad \text{y} \quad I_2(\mathbf{y}) := \int_F \frac{1}{|\mathbf{y} - \mathbf{x}|} dS_{\mathbf{x}},$$

para cada vector $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ y cualquier triángulo $F \subset \mathbb{R}^3$. Por simplicidad de notación, identificamos los vectores de \mathbb{R}^3 con los puntos del espacio afín asociado.

Sea $h_{\mathbf{y}} := (\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}_F \in \mathbb{R}$ y definimos $\mathbf{p}_{\mathbf{y}} := \mathbf{y} + h_{\mathbf{y}} \mathbf{n}_F$, que representa la proyección de \mathbf{y} sobre el plano que contiene al triángulo F ; véase la Figura A.1.

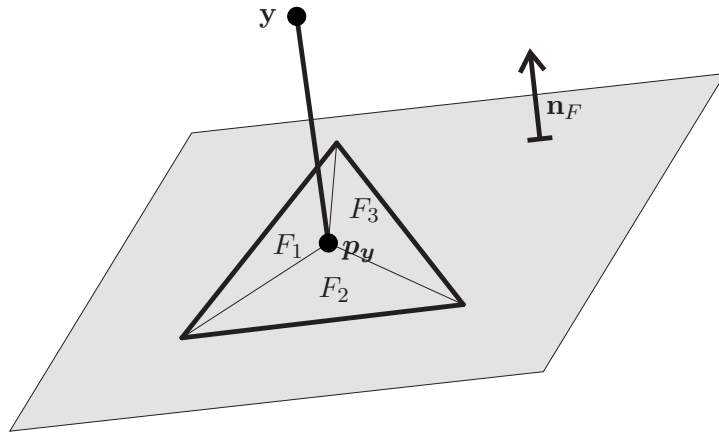


Figura A.1: Proyección $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$

Nótese que $\mathbf{y} = -h_{\mathbf{y}} \mathbf{n}_F + \mathbf{p}_{\mathbf{y}}$, luego

$$I_1(\mathbf{y}) = - \int_F \frac{h_{\mathbf{y}} \mathbf{n}_F \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} + \int_F \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}}, \quad (\text{A.0.2})$$

$$I_2(\mathbf{y}) = \int_F \frac{1}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{1/2}} dS_{\mathbf{x}}. \quad (\text{A.0.3})$$

En [30, 27] se calcula (A.0.3) de forma exacta; damos su resultado al final del presente párrafo. Por otro lado, en la literatura no hemos encontrado aproximaciones de (A.0.2). Por esta razón, a continuación proponemos una aproximación de (A.0.2) siguiendo el razonamiento utilizado en [30, 27] para calcular (A.0.3).

Cuando \mathbf{y} está en el plano que contiene a F , es claro que $h_{\mathbf{y}} = 0$ y que $\mathbf{n}_{\mathbf{y}} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{x}) = 0$, de forma que $I_1(\mathbf{y}) = 0$. Por lo tanto, en lo que sigue, suponemos sin pérdida de generalidad que $\mathbf{y} \neq \mathbf{p}_{\mathbf{y}}$.

Comenzamos estudiando el *segundo sumando* de (A.0.2). Para ello, descomponemos la integral utilizando los tres triángulos F_1 , F_2 y F_3 determinados por $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$ y los vértices de F tomados de dos en dos; véase la Figura A.1. De esta forma,

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} = \sum_{m=1}^3 \epsilon_m \int_{F_m} \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}},$$

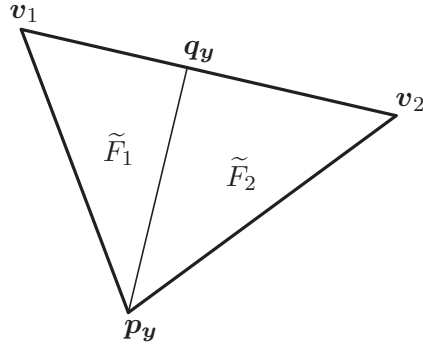
donde $\epsilon_m = \pm 1$. En consecuencia, es suficiente aproximar

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}}$$

para un triángulo F que tiene a $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$ como vértice. Descomponemos nuevamente esta integral proyectando $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$ sobre el lado opuesto de F . Es decir, si F tiene por vértices $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$, \mathbf{v}_1 y \mathbf{v}_2 , entonces definimos $\mathbf{q}_{\mathbf{y}}$ como la proyección de $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$ sobre el lado $\{s \mathbf{v}_1 + (1-s) \mathbf{v}_2; s \in [0, 1]\}$. Para $m = 1, 2$, representamos por \tilde{F}_m el triángulo de vértices $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{q}_{\mathbf{y}}$ y \mathbf{v}_m ; véase la Figura A.2 a continuación.

Con esta notación, resulta que

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} = \sum_{m=1}^2 \tilde{\epsilon}_m \int_{\tilde{F}_m} \frac{(\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}},$$

Figura A.2: Descomposición de F

siendo $\tilde{\epsilon}_m = \pm 1$. Por lo tanto, basta aproximar

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_x$$

cuando F es un triángulo rectángulo con vértices \mathbf{p}_y , \mathbf{q}_y y \mathbf{v} tales que

$$(\mathbf{p}_y - \mathbf{q}_y) \cdot (\mathbf{v} - \mathbf{q}_y) = 0 \quad \text{y} \quad \mathbf{p}_y - \mathbf{y} = h_y \mathbf{n}_F. \quad (\text{A.0.4})$$

Tomando coordenadas polares con centro en \mathbf{p}_y , obtenemos que

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_x = \int_0^\phi \left(\int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{(\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{(h^2 + r^2)^{3/2}} r dr \right) d\theta,$$

donde denotamos $\rho := |\mathbf{q}_y - \mathbf{p}_y|$ y $\phi := \angle(\mathbf{q}_y - \mathbf{p}_y, \mathbf{v} - \mathbf{p}_y)$; véase la Figura A.3.

Descomponemos el vector \mathbf{n}_y en sus componentes normal y tangencial como $\mathbf{n}_y = (\mathbf{n}_y \cdot \mathbf{n}_F) \mathbf{n}_F + \hat{\mathbf{n}}_y$; véase la Figura A.4.

Si tomamos $\hat{\theta} := \angle(\hat{\mathbf{n}}_y, \mathbf{q} - \mathbf{p}_y)$, entonces

$$\mathbf{n}_y \cdot (\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) = -|\hat{\mathbf{n}}_y| |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}| \cos(\hat{\mathbf{n}}_y, \mathbf{x} - \mathbf{p}_y) = -|\hat{\mathbf{n}}_y| r \cos(\hat{\theta} + \theta),$$

así que

$$\int_F \frac{(\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_x = -|\hat{\mathbf{n}}_y| \int_0^\phi \left(\int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{r^2}{(h_y^2 + r^2)^{3/2}} dr \right) \cos(\hat{\theta} + \theta) d\theta.$$

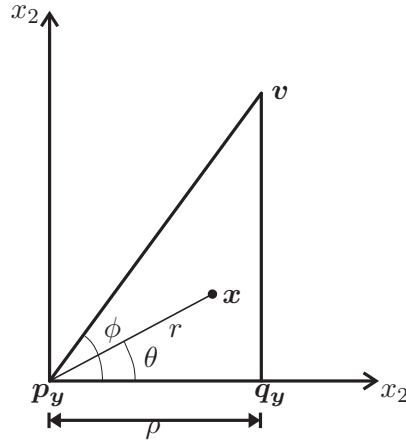


Figura A.3: Coordenadas polares con centro en p_y

Además, integrando por partes, tenemos que

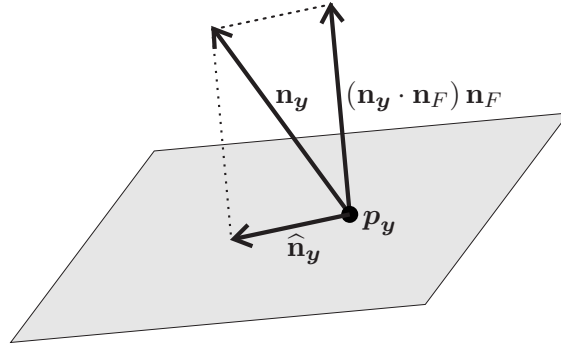
$$\int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{r^2}{(h_y^2 + r^2)^{3/2}} dr = \left[-\frac{r}{(h_y^2 + r^2)^{1/2}} + \arg \sinh \frac{r}{|h_y|} \right] \Bigg|_{r=\frac{\rho}{\cos \theta}}$$

Luego

$$\begin{aligned} \int_F \frac{(\mathbf{p}_y - \mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_x &= \\ &= |\hat{\mathbf{n}}_y| \int_0^\phi \left(\frac{\rho}{(h_y^2 \cos^2 \theta + \rho^2)^{1/2}} - \arg \sinh \frac{\rho}{\cos \theta |h_y|} \right) \cos(\hat{\theta} + \theta) d\theta. \end{aligned}$$

Nótese que con este razonamiento hemos eliminado la singularidad del integrando. En consecuencia, podemos aproximar la integral en la variable θ con una fórmula de cuadratura unidimensional estándar. Por ejemplo, podemos aplicar la siguiente fórmula de Gauss:

$$\int_{-1}^1 f(\theta) d\theta \simeq \frac{5}{9} f(-0,7745) + \frac{8}{9} f(0) + \frac{5}{9} f(0,7745) \quad \forall f \in \mathcal{C}([-1, 1]).$$

Figura A.4: Descomposición del vector \mathbf{n}_y

Haciendo una descomposición del triángulo F análoga a la anterior, reducimos el cálculo del *primer sumando* de (A.0.2) al caso de un triángulo rectángulo F de vértices \mathbf{p}_y , \mathbf{q}_y y \mathbf{v} que satisfagan (A.0.4). Entonces, tomando coordenadas polares, resulta que

$$\int_F \frac{h_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p}_y - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} = \int_0^\phi \left(\int_0^{\frac{\rho}{\cos\theta}} \frac{h_y r}{(h_y^2 + r^2)^{3/2}} dr \right) d\theta.$$

Ahora integramos de forma explícita en la variable r :

$$\int_0^{\frac{\rho}{\cos\theta}} \frac{h_y r}{(h_y^2 + r^2)^{3/2}} dr = -\frac{h_y}{(h_y^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2\theta})^{1/2}} + \text{signo}(h_y),$$

donde

$$\text{signo}(h_y) := \begin{cases} \frac{h_y}{|h_y|} & \text{si } h_y \neq 0, \\ 0 & \text{si } h_y = 0. \end{cases}$$

Entonces tenemos que

$$\int_F \frac{h_y}{(h_y^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} = \text{signo}(h_y) \left(\phi - \int_0^\phi \frac{|h_y|}{(h_y^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta \right).$$

Para calcular la integral en la variable θ , seguimos la estrategia propuesta en [30] y hacemos el cambio de variable

$$\tan u = \frac{\rho}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}} \tan \theta,$$

cuyo jacobiano es

$$d\theta = \frac{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}}{\rho} \frac{1 + \tan^2 u}{1 + \tan^2 \theta} du.$$

De esta forma, resulta que

$$\int_0^\phi \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta = \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{\rho} \int_0^v \frac{(1 + \tan^2 u)^{1/2}}{1 + \frac{h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2}{\rho^2} \tan^2 u} du,$$

siendo $\tan v := \tan \frac{\rho \tan \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}}$. Reescribimos este resultado como

$$\int_0^\phi \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta = \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{\rho} \int_0^v \frac{\cos u}{1 + \left(\frac{h_{\mathbf{y}}}{\rho}\right)^2 \sin^2 u} du.$$

Haciendo el nuevo cambio de variable $v = \sin u$ y definiendo $\nu := \sin v$,

$$\int_0^\phi \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta = \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{\rho} \int_0^\nu \frac{1}{1 + \left(\frac{h_{\mathbf{y}}}{\rho}\right)^2 v^2} dv = \arg \tan \frac{|h_{\mathbf{y}}| \nu}{\rho}.$$

Ahora aplicamos la relación

$$\nu = \sin v = \frac{\rho \tan \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \phi)^{1/2}},$$

y así deducimos que

$$\int_0^\phi \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta = \arg \tan \frac{|h_{\mathbf{y}}| \tan \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \phi)^{1/2}};$$

equivalentemente,

$$\int_0^\phi \frac{|h_{\mathbf{y}}|}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \theta)^{1/2}} d\theta = \arg \sin \frac{|h_{\mathbf{y}}| \sin \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}}.$$

Por lo tanto, tenemos que

$$\int_F \frac{h_{\mathbf{y}}}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p} - \mathbf{x}|^2)^{3/2}} dS_{\mathbf{x}} = \text{signo}(h_{\mathbf{y}}) \left(\phi - \arg \sin \frac{|h_{\mathbf{y}}| \sin \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}} \right).$$

Concluimos este apéndice señalando las líneas generales seguidas en [30] para calcular de forma exacta (A.0.3).

De nuevo, descomponemos el triángulo F y reducimos el cálculo de (A.0.3) al caso en el que F es un triángulo rectángulo cuyos vértices $\mathbf{p}_{\mathbf{y}}$, $\mathbf{q}_{\mathbf{y}}$ y \mathbf{v} cumplen (A.0.4). En esta situación, en [30] se muestra que

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{1/2}} dS_{\mathbf{x}} &= \int_0^\phi \left(\int_0^{\frac{\rho}{\cos \theta}} \frac{r}{(h_{\mathbf{y}}^2 + r^2)^{1/2}} dr \right) d\theta = \\ &= \int_0^\phi \left((h_{\mathbf{y}}^2 + \frac{\rho^2}{\cos^2 \theta})^{1/2} - h_{\mathbf{y}} \right) d\theta. \end{aligned}$$

Entonces, haciendo cambios de variable análogos a los anteriores, resulta que

$$\begin{aligned} \int_F \frac{1}{(h_{\mathbf{y}}^2 + |\mathbf{p}_{\mathbf{y}} - \mathbf{x}|^2)^{1/2}} dS_{\mathbf{x}} &= \rho \lg \frac{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \phi)^{1/2} + \rho \tan \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2)^{1/2}} \\ &\quad + h_{\mathbf{y}} \arg \sin \frac{h_{\mathbf{y}} \sin \phi}{(h_{\mathbf{y}}^2 + \rho^2 + \rho^2 \tan^2 \phi)^{1/2}} - h_{\mathbf{y}} \phi. \end{aligned}$$

Bibliografía

- [1] A. ALONSO, A mathematical justification of the low-frequency heterogeneous time-harmonic Maxwell equations, *Math. Models Methods Appl. Sci.* **9** (1999), no. 3, 475–489.
- [2] A. ALONSO, A. VALLI, An optimal domain decomposition preconditioner for low-frequency time-harmonic Maxwell equations, *Math. Comp.* **68** (1999), 607–631.
- [3] A. ALONSO, P. FERNANDES, A. VALLI, The time-harmonic eddy current problem in general domains: solvability via scalar potentials. UTM–611, Dipartimento di Matematica, Università degli Studi di Trento, 2001.
- [4] A. ALONSO, A. VALLI, A domain decomposition approach for heterogeneous time-harmonic Maxwell equations, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **143** (1997), 97–112.
- [5] A. ALONSO, R. HIPTMAIR, A. VALLI, Mixed finite element approximation of eddy current problems, *IMA J. Numer. Anal.* **24** (2004), 255–271.
- [6] H. AMMARI, A. BUFFA, J.-C. NÉDÉLEC, A justification of eddy currents model for the Maxwell equations, *SIAM J. Appl. Math.* **60** (2000), 1805–1823.
- [7] C. AMROUCHE, C. BERNARDI, M. DAUGE, V. GIRAULT, Vector potentials in three-dimensional nonsmooth domains, *Math. Methods Appl. Sci.* **21** (1998), 823–864.

- [8] A. BERMÚDEZ, R. RODRÍGUEZ, P. SALGADO, A finite element method with Lagrange multipliers for low-frequency harmonic Maxwell equations, *SIAM J. Numer. Anal.* **40** (2002), 1823–1849.
- [9] A. BERMÚDEZ, R. RODRÍGUEZ, P. SALGADO, Modeling and numerical treatment of boundary data in an eddy currents problem, *C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I*, **335** (2002), 633–638.
- [10] A. BOSSAVIT, J. VÉRITÉ, The TRIFOU code: Solving the 3-D eddy-currents problem by using H as state variable, *IEEE Trans. MAG-19* **6** (1983), 2465–70.
- [11] A. BOSSAVIT, Two dual formulations of the 3D eddy-currents problem, *COMPEL* **4** (1985), 103–116.
- [12] A. BOSSAVIT, A rationale for edge elements in 3D field computations, *IEEE Trans. Mag.*, **24** (1988), 74–79.
- [13] A. BOSSAVIT, The computation of eddy-currents in dimension 3 by using mixed finite elements and boundary elements in association, *Math. Comput. Modelling*, **15** (1991), 33–42.
- [14] A. BOSSAVIT, *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, Springer-Verlag, Paris Berlin Heidelberg, 1993.
- [15] A. BOSSAVIT, *Computational Electromagnetism: Variational Formulations, Complementarity, Edge Elements*, Academic Press, SanDiego, 1997.
- [16] A. BUFFA, P. CIARLET, JR., On traces for functional spaces related to Maxwell’s equation. Part I: An integration by parts formula in Lipschitz polyhedra, *Math. Meth. Appl. Sci.* **24**(1) (2001), 9–30.
- [17] A. BUFFA, Hodge decompositions on the boundary of a polyhedron: the multi-connected case, *Math. Meth. Model. Appl. Sci.* (2001) Vol. 11, No. 9, pp. 1491–1504.

- [18] A. BUFFA, Traces for functional spaces related to Maxwell equations: an overview, *Proceedings of GAMM-Workshop*, Kiel, 2001.
- [19] A. BUFFA, M. COSTABEL, CH. SCHWAB, Boundary element methods for Maxwell's equations on non-smooth domains, *Numer. Math.* (2002) Vol. 92, No. 4, pp. 679–710.
- [20] A. BUFFA, M. COSTABEL, D. SHEEN, On traces for $\mathbf{H}(\text{rot}, \Omega)$ in Lipschitz domains, *IAN-CNR 1185* (2000), Universidad de Pavia.
- [21] A. BUFFA, R. HIPTMAIR, Galerkin boundary element methods for electromagnetic scattering. Topics in computational wave propagation, *Lect. Notes Comput. Sci. Eng.* **31** Springer, Berlin (2003) 83–124.
- [22] H. BRÉZIS, *Análisis Funcional*, Alianza Universidad Textos, Madrid, 1984.
- [23] E. CASAS, *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Servicio de Publicaciones, Universidad de Cantabria, 1992.
- [24] M. CESSENAT, *Mathematical methods in electromagnetism: linear theory and applications*, World Scientific, Singapur, 1996.
- [25] M. COSTABEL, Symmetric methods for the coupling of finite elements and boundary elements, *The Mathematics of Finite Elements and Applications IV*, Academic Press, London, 1988.
- [26] R. COURANT, D. HILBERT, *Methods of mathematical physics*, Vol. I, Interscience Publishers, Nueva York, 1953.
- [27] R. DAUTRAY, J.L. LIONS, *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques*, Volume 5, Masson, Paris Milan Barcelone, 1988.
- [28] L. H. DIXON, JR., Eddy current losses in transformer windings and circuit wiring, *Unitrode Corporation*.

- [29] V. GIRAULT, P. A. RAVIART, *Finite element approximation of the Navier-Stokes equations: theory and algorithms*, Springer, Berlin Heidelberg New York, 1986.
- [30] J. GIROIRE, *Mise en œuvre de méthodes d'éléments finis de frontière*, D.E.A. d'Analyse Numérique, Universidad Pierre et Marie Curie, 1987–1988.
- [31] J.L. GUERMOND, P.D. MINEV, Mixed finite element approximation of an MHD problem involving conducting and isolating regions: the 3D case, *Numer. Methods Partial Differential Equations*, **19**(6) (2003) 709–731.
- [32] R. HIPTMAIR, Symmetric coupling for eddy current problems, *Technical Report 148, Soderforschungsbereich 382*, Universidad de Tübingen, 2001.
- [33] M. T. HOLMBERG, Three-dimensional finite element computation of eddy currents in synchronous machines, *Technical Report 350*, Universidad de Göteborg, 1998.
- [34] C. JOHNSON, J. C. NÉDÉLEC, On the coupling of boundary integral and finite element methods, *Math. of Comp.* **35** (1980), 1063–1079.
- [35] W. MCLEAN, *Strongly elliptic systems and boundary integral equations*, Cambridge University Press, 2000.
- [36] S. MEDDAHI, An optimal iterative process for the Johnson-Nedelec method of coupling boundary and finite elements, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **35** (1998), 1393–1415.
- [37] S. MEDDAHI, F.J. SAYAS, A fully discrete BEM-FEM for the exterior Stokes problem in the plane, *SIAM Journal on Numerical Analysis* **37** (2000), 2082–2102.
- [38] S. MEDDAHI, J. VALDÉS, O. MENÉNDEZ AND P. PÉREZ, On the coupling of boundary integral and mixed finite element methods, *J. Comput. Appl. Math.* **69** (1996), 127–141.

- [39] S. MEDDAHI, A mixed-FEM and BEM coupling for a two-dimensional eddy current problem, *SIAM Numer. Funct. Anal. and Optimiz.* **22** (5&6) (2001), 675–696.
- [40] S. MEDDAHI, A. MÁRQUEZ, A combination of spectral and finite elements methods for an exterior problem in the plane, *Applied Numerical Mathematics* **43** (3) (2002), 275–295.
- [41] S. MEDDAHI, V. SELGAS, A mixed-FEM and BEM coupling for a three-dimensional eddy current problem, *Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, **37**(2) (2003), 291–318.
- [42] S. MEDDAHI, A. MÁRQUEZ, V. SELGAS, Computing acoustic waves in an inhomogeneous medium of the plane by a coupling of spectral and finite elements, *SIAM J. Numer. Anal.*, **41** (5) (2003), 1729–1750.
- [43] S. MEDDAHI, A. MÁRQUEZ, V. SELGAS, A new BEM-FEM coupling strategy for two dimensional fluid-solid interaction problems, *J. Comput. Phys.* **199** (1) (2004), 205–220.
- [44] S. MEDDAHI, V. SELGAS, An H-based FEM-BEM formulation for a time dependent eddy current problem, *Technical Report 05–07* (2005), Departamento de Matemáticas, Universidad de Oviedo.
- [45] P. MONK, *Finite element methods for Maxwell's equations*, Clarendon Press, Oxford, 2003.
- [46] J. C. NÉDÉLEC, *Acoustic and electromagnetic equations. Integral representations for harmonic problems*, Springer-Verlag, New York, 2001.
- [47] J. C. NÉDÉLEC, Mixed finite elements in R^3 , *Numer. Math.* **35** (1980), 315–341.
- [48] W. R. SMYTHE, *Static and dynamic electricity*, McGraw-Hill, New York, 1950.

- [49] E. P. STEPHAN, M. MAISCHAK, A posteriori error estimates for fem-bem couplings of three-dimensional electromagnetic problems, *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **194** (2005), no. 2-5, 441–452.
- [50] M. TELTSCHER, M. MAISCHAK, E. P. STEPHAN, A residual error estimator for an electromagnetic fem-bem coupling problem in \mathbb{R}^3 , *Technical Report* 52 (2003) Inst. Angew. Mathematik, Universität Hannover.
- [51] M. TELTSCHER, M. MAISCHAK, E. P. STEPHAN, A hierarchical error estimator for an electromagnetic scattering problem coupling fem and bem in \mathbb{R}^3 , *Technical Report* 53 (2003) Inst. Angew. Mathematik, Universität Hannover.
- [52] M. TELTSCHER, M. MAISCHAK, E. P. STEPHAN, A hierarchical error estimator for an eddy current fem-bem coupling problem, *Technical Report* 56 (2003) Inst. Angew. Mathematik, Universität Hannover.
- [53] F. TREVES, *Basic linear partial differential equations*, Academic Press, New York, 1975.
- [54] H.A. VAN DER VORST, J.B.M. MELISSEN, A Petrov–Galerkin type method for solving $Ax = b$, where A is symmetric complex, *IEEE Transactions on Magnetics*, **26**(2) (1990), 706-708.
- [55] H. WHITNEY, *Geometric Integration Theory*, Princeton University Press, Princeton, 1957.
- [56] K. YOSIDA, *Functional Analysis*, Springer–Verlag, Berlin Heidelberg, 1980.
- [57] E. ZEIDLER, *Nonlinear functional analysis and its applications. II/A. Linear monotone operators*, Springer–Verlag, New York, 1990.
- [58] A. ŽENÍŠEK, *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations*, Academic Press, London, 1990.