

Análisis numérico de problemas de contorno
en dominios no acotados del plano

María González Taboada

4 de julio de 2000

Índice general

Introducción	1
1. Preliminares	5
1.1. Espacios de Sobolev	5
1.2. Funciones armónicas en dominios no acotados del plano	10
2. La ecuación de Poisson	15
2.1. El problema modelo. Existencia y unicidad	16
2.2. Discretización y análisis del error	19
2.2.1. Triangulación exacta del dominio acotado	19
2.2.2. Esquema discreto y estimaciones del error	22
2.3. El efecto de la integración numérica	23
2.3.1. El esquema completamente discreto	23
2.3.2. Estimaciones del error	28
2.4. Un algoritmo para resolver el problema	30
2.5. Experiencias numéricas	34
2.6. El caso de una frontera auxiliar circular	35
2.6.1. La formulación variacional	36
2.6.2. El problema discreto	37
2.6.3. El efecto de la integración numérica	37
2.6.4. Experiencias numéricas	38

3. Un problema no lineal monótono	41
3.1. El problema modelo	42
3.2. Existencia y unicidad	45
3.3. El problema discreto	46
3.4. El efecto de la integración numérica	49
3.5. Algunos ejemplos	52
3.6. El caso de una frontera auxiliar circular	53
3.6.1. La formulación variacional	53
3.6.2. El problema discreto	54
3.6.3. El efecto de la integración numérica	55
3.6.4. Experiencias numéricas	56
3.6.5. Una aplicación en Magnetostática	56
4. Un problema parabólico-elíptico no lineal	61
4.1. Motivación	62
4.2. El problema modelo	63
4.3. El problema discreto	68
4.4. Un resultado de existencia, unicidad y convergencia	70
4.5. Estimaciones del error	74
4.6. Un esquema completamente discreto	77
4.7. El efecto de la integración numérica	78
5. Un problema elíptico cuasi-lineal	81
5.1. El problema modelo	82
5.2. El problema discreto	85
5.3. Un esquema completamente discreto	90
5.4. El caso de una frontera auxiliar circular	94
5.4.1. La formulación variacional	94
5.4.2. El problema discreto	95
5.4.3. El efecto de la integración numérica	95

5.4.4. Experiencias numéricas	96
6. El sistema de Lamé	99
6.1. El problema modelo	100
6.2. El problema discreto	107
6.3. El esquema completamente discreto	108
6.4. El efecto de la integración numérica	111
6.5. Una técnica de preconditionamiento	114
6.6. Una aplicación en elasto-plasticidad	116
Bibliografía	125

Introducción

En muchas áreas de la Física y la Ingeniería, como por ejemplo en Electromagnetismo, Acústica, Dinámica de Fluidos o Elasticidad, se presenta a menudo la necesidad de resolver un problema planteado en un dominio no acotado (en los libros de D. Colton y R. Kress [18] y C. Chen y J. Zhou [15] se pueden encontrar algunos ejemplos). Las técnicas de acoplamiento de elementos finitos (FEM) y elementos de contorno (BEM) son una herramienta muy eficaz para resolver este tipo de problemas. La idea es compensar las deficiencias de un método con las ventajas del otro. En efecto, el BEM es especialmente interesante a la hora de resolver problemas en dominios no acotados ya que permite reducir el problema a una ecuación integral sobre la frontera del dominio. Sin embargo, presenta el inconveniente de que las ecuaciones deben ser homogéneas y lineales con coeficientes constantes. Por otra parte, el FEM solo puede utilizarse sobre dominios acotados, pero se puede emplear cuando los materiales son no homogéneos o las ecuaciones son no lineales.

Las técnicas de acoplamiento BEM–FEM consisten en dividir el dominio del problema original en dos regiones, una región interior acotada y otra exterior no acotada, introduciendo una frontera auxiliar si es necesario. De este modo, el problema se convierte en un problema de transmisión, exigiendo que la solución verifique condiciones adecuadas sobre la frontera de acoplamiento. Usando una representación integral de la solución en el dominio exterior, el problema se reduce a un problema planteado en la región interior acotada, con condiciones de contorno *no locales* sobre la frontera artificial que relacionan los datos de Cauchy de la solución. Este último paso puede llevarse a cabo de distintas maneras, obteniendo en cada caso una formulación BEM–FEM diferente. El nuevo problema se resuelve aplicando el método de los elementos finitos. Así, determinamos la solución en la región interior acotada y los datos de Cauchy sobre la frontera auxiliar. En la región no acotada, la solución se calcula empleando la fórmula de representación.

El primer acoplamiento BEM–FEM fue presentado en 1979 por O.C. Zienkiewicz et al. [101], aunque la idea de combinar métodos de ecuaciones integrales con otras

técnicas ya había sido empleada por D. Greenspan y P. Werner [43] más de diez años antes. Los primeros trabajos en los que se estudia desde el punto de vista teórico una formulación BEM–FEM basada en la fórmula de representación de Green son los de F. Brezzi y C. Johnson [11], y C. Johnson y J.C. Nédélec [54] (más tarde generalizados por W.L. Wendland [93, 94]). Esta formulación también ha sido utilizada para discretizaciones BEM–FEM de problemas de Stokes exteriores (véase A. Sequeira [87], S. Meddahi y F.J. Sayas [72]). Sin embargo, el éxito del método de C. Johnson y J.C. Nédélec, y de la generalización de W.L. Wendland, depende de que el operador asociado al potencial de capa doble sea compacto. En muchas aplicaciones, como por ejemplo en Elasticidad, no se verifica esta propiedad.

M. Costabel [20] y H. Han [48] presentaron simultáneamente una formulación basada en añadir una ecuación integral sobre la frontera de acoplamiento. En esta formulación, conocida como *método simétrico*, la compacidad del operador de capa doble no juega ningún papel. Por esta razón, se emplea para resolver el sistema de elasticidad (cf. M. Costabel y E.P. Stephan [24], G.N. Gatica y G.C. Hsiao [36]). El método simétrico también ha sido generalizado de forma satisfactoria para resolver problemas de contorno no lineales que son homogéneos y lineales con coeficientes constantes en el exterior de una región acotada. En este caso, el análisis del error se realiza cuando el operador no lineal es fuertemente monótono y Lipschitz-continuo (véanse M. Costabel y E.P. Stephan [24], G.N. Gatica y G.C. Hsiao [36, 33]).

Desde que se realizó el primer acoplamiento BEM–FEM a finales de los años setenta, ha habido muchos avances en el análisis numérico de estos métodos. Sin embargo, aún queda mucho por hacer para que sean ampliamente utilizados. Esto es debido, entre otras razones, a que estas formulaciones conducen a sistemas lineales mal condicionados y con una estructura complicada. Además, en general son no definidos y en algunos casos, ni siquiera son simétricos. Por otra parte, debido a la presencia de operadores integrales con núcleos singulares, la construcción de estos sistemas no es sencilla. Además, hasta donde sabemos, no existe ningún estudio acerca del efecto de la integración numérica sobre la convergencia.

En este trabajo, presentamos una nueva versión del método simétrico de acoplamiento para problemas bidimensionales exteriores que permite estudiar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Basándonos en las ideas de S. Meddahi [67], consideramos una frontera auxiliar regular y sustituimos las funciones definidas sobre ella por funciones periódicas. De este modo se obtiene una nueva formulación BEM–FEM equivalente a la dada por M. Costabel [20] y H. Han [48]. Empleando elementos finitos curvos en la discretización, se llega a un esquema de Galerkin diferente que permite utilizar las técnicas de G.C. Hsiao et al. [51] (ver también M. Crouzeix y F.J. Sayas [25]) para aproximar los términos de contorno

mediante fórmulas de cuadratura elementales. Estudiamos el efecto de la integración numérica y probamos que se conserva el orden de convergencia. También proponemos algoritmos para resolver los sistemas que resultan de la discretización.

Hemos aplicado estas técnicas a diferentes problemas exteriores en el plano. En el capítulo 1, introducimos las notaciones y los conceptos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Recordamos las definiciones y las propiedades fundamentales de los espacios de Sobolev clásicos, y examinamos la relación de los espacios de Sobolev periódicos con los espacios de Sobolev sobre una curva cerrada. También estudiamos las propiedades de las funciones armónicas en dominios no acotados del plano, prestando especial atención a su representación mediante la fórmula de Green y a las propiedades de los operadores integrales que intervienen. En el capítulo 2, ilustramos el método que proponemos utilizando como modelo la ecuación de Poisson. Para resolver el sistema lineal al que conduce la discretización, proponemos un algoritmo basado en una técnica de preconditionamiento debida a J.H. Bramble y J.E. Pasciak [9]. Además, presentamos resultados de las experiencias numéricas realizadas.

En los capítulos 3–5 extendemos las técnicas presentadas en el capítulo 2 para estudiar varios problemas no lineales exteriores. En el capítulo 3, consideramos un problema no lineal con un operador fuertemente monótono y Lipschitz-continuo en una zona acotada del dominio, y la ecuación de Laplace en la región exterior no acotada. Este tipo de problemas aparece, por ejemplo, en ciertas aplicaciones en Magnetostática. Presentamos los resultados numéricos obtenidos para el cálculo del campo magnético estacionario en un motor eléctrico. En el capítulo 4, motivados por el estudio de las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos cuasi-estacionarios, analizamos un problema modelo que consiste en una ecuación parabólica no lineal con un operador fuertemente monótono y Lipschitz-continuo en una zona acotada, y la ecuación de Laplace en el dominio exterior. En el capítulo 5 se generalizan los resultados obtenidos en el capítulo 3 para un problema elíptico cuasi-lineal.

Por último, en el capítulo 6 consideramos las ecuaciones de la elasticidad lineal en un dominio plano no acotado. Utilizamos la nueva formulación para estudiar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. En este caso, el operador asociado al potencial de capa doble es singular y debemos tener cuidado al aplicar fórmulas de cuadratura. También presentamos una aplicación en elasto-plasticidad. El problema modelo consiste en las ecuaciones de Hencky en una zona acotada del dominio y las ecuaciones de la elasticidad lineal en la región exterior no acotada. El problema que resulta es fuertemente monótono y Lipschitz-continuo, de forma que utilizaremos técnicas similares a las empleadas en el capítulo 3.

Capítulo 1

Preliminares

En este capítulo, presentamos algunos conceptos básicos necesarios para el desarrollo de este trabajo. Primero, recordamos las definiciones y propiedades de los espacios de Sobolev clásicos. También consideramos los espacios de Sobolev de funciones periódicas y su relación con los espacios de Sobolev sobre una curva cerrada. Después, estudiamos las soluciones de la ecuación de Laplace en el exterior de un dominio acotado de \mathbb{R}^2 , prestando una atención especial a las propiedades de los operadores integrales cuando la frontera del dominio es regular.

A lo largo de este trabajo, empleamos las notaciones siguientes. Los vectores y las funciones vectoriales se denotan por letras minúsculas en negrita. Utilizamos un punto para denotar el producto escalar euclídeo en \mathbb{R}^2 :

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} := \sum_{i=1}^2 u_i v_i$$

La norma euclídea se denota por $|\cdot|$. Las matrices y funciones matriciales se denotan por letras mayúsculas en negrita, y el superíndice \top indica la trasposición de una matriz. Por último, en todo lo que sigue, C , con o sin subíndices, es una constante genérica.

1.1. Espacios de Sobolev

Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un dominio acotado cuya frontera Γ es de Lipschitz y sea k un número natural. Designamos por $C^k(\overline{\Omega})$ el espacio de las funciones reales tales que todas sus derivadas hasta el orden k son continuas en $\overline{\Omega}$. El espacio de Sobolev de

índice k , $H^k(\Omega)$, es la completación de $\mathcal{C}^k(\overline{\Omega})$ con respecto a la norma

$$\|v\|_{k,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

donde $\alpha := (\alpha_1, \alpha_2)$ es un multi-índice y denotamos

$$\partial^{\alpha} := \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2}} \quad |\alpha| := \alpha_1 + \alpha_2$$

De forma equivalente, se define

$$H^k(\Omega) := \{v \in L^2(\Omega) ; \partial^{\alpha} v \in L^2(\Omega) \text{ si } |\alpha| \leq k\}$$

Las seminormas correspondientes se denotan

$$|v|_{k,\Omega} := \left(\sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} |\partial^{\alpha} v(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x} \right)^{1/2}$$

A continuación, enunciamos un resultado conocido como *Teorema de traza* que muestra en qué sentido interpretamos la restricción a la frontera de las funciones de los espacios de Sobolev. La prueba puede consultarse, por ejemplo, en E. Casas [14].

Teorema 1.1. *Sea Ω un dominio acotado en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ es de Lipschitz. La aplicación que a cada función $v \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega})$ le hace corresponder su traza $v|_{\Gamma}$ se extiende de manera única a un operador lineal continuo de $H^1(\Omega)$ en $L^2(\Gamma)$. Su imagen se denota $H^{1/2}(\Gamma)$ y se llama espacio de las trazas.*

Sea $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ el espacio de las funciones reales tales que existen sus derivadas de cualquier orden en $\overline{\Omega}$. El espacio de Sobolev de índice no entero, $H^{k+\varepsilon}(\Omega)$, para $\varepsilon \in (0, 1)$, se define como la completación del espacio $\mathcal{C}^{\infty}(\overline{\Omega})$ en la norma

$$\|v\|_{k+\varepsilon,\Omega} := \left(\|v\|_{k,\Omega}^2 + |v|_{k+\varepsilon,\Omega}^2 \right)^{1/2}$$

donde

$$|v|_{k+\varepsilon,\Omega}^2 := \sum_{|\alpha|=k} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|\partial^{\alpha} v(\mathbf{x}) - \partial^{\alpha} v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2\varepsilon}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

También utilizaremos el espacio $L^{\infty}(\Omega)$, formado por las funciones medibles y acotadas en casi todo punto de Ω , dotado de la norma usual que denotamos $\|\cdot\|_{0,\infty,\Omega}$.

El espacio $W^{k,\infty}(\Omega)$ está formado por las funciones $v \in L^\infty(\Omega)$ cuyas derivadas parciales de orden inferior o igual a k en el sentido de distribuciones pertenecen al espacio $L^\infty(\Omega)$. Denotamos la norma y la seminorma correspondientes por $\|\cdot\|_{k,\infty,\Omega}$ y $|\cdot|_{k,\infty,\Omega}$. En R. Adams [1] se realiza un estudio detallado de los espacios anteriores.

Seguidamente estudiamos los espacios de Sobolev de funciones periódicas. Para ello, necesitamos recordar la representación clásica en serie de Fourier de una función. Consideramos el espacio $L^2(0,1)$ dotado del producto escalar

$$(\phi, \psi) := \int_0^1 \phi(s)\psi(s) ds$$

Dada una función $\phi \in L^2(0,1)$, las cantidades

$$\hat{\phi}(m) := \int_0^1 \phi(s) e^{-2\pi i m s} ds \quad \forall m \in \mathbb{Z}$$

se llaman los *coeficientes de Fourier de ϕ* , y la serie

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(m) e^{2\pi i m s}$$

es la *serie de Fourier de ϕ* (utilizando el Teorema de Aproximación de Weierstrass, se puede ver que esta serie es convergente en $L^2(0,1)$).

A continuación definimos una familia de subespacios de $L^2(0,1)$, exigiendo que los coeficientes de Fourier de sus elementos tengan cierto decrecimiento cuando $|m|$ tiende a infinito.

Definición 1.2. Sea $p \in [0, \infty)$. Se llama *espacio de Sobolev 1-periódico de índice p* al espacio $H^p[0,1]$ formado por las funciones $\phi \in L^2(0,1)$ tales que

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p |\hat{\phi}(m)|^2 < \infty$$

En lo que sigue, empleamos la notación abreviada $H^p \equiv H^p[0,1]$. Nótese que, en virtud de la igualdad de Parseval, H^0 coincide con $L^2(0,1)$.

Teorema 1.3. El espacio de Sobolev H^p es un espacio de Hilbert dotado del producto escalar

$$(\phi, \psi)_p := \sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p \hat{\phi}(m)\hat{\psi}(m) \quad \forall \phi, \psi \in H^p$$

La norma asociada está dada por

$$\|\phi\|_p := \left(\sum_{m=-\infty}^{\infty} (1+m^2)^p |\hat{\phi}(m)|^2 \right)^{1/2}$$

Además, los polinomios trigonométricos son densos en H^p .

Prueba. La prueba de este resultado es sencilla. Se puede encontrar, por ejemplo, en R. Kress [56, Teorema 8.2]. ■

Teorema 1.4. Sean p, q con $0 \leq p < q < \infty$). Entonces, H^q es denso en H^p y la inclusión de H^q en H^p es compacta.

Prueba. Es claro que, para $q > p$, la inclusión $\mathcal{I}: H^q \rightarrow H^p$ es continua. Por otra parte, la densidad de H^q en H^p es una consecuencia de la densidad de los polinomios trigonométricos en H^r , para cualquier $r > 0$. Por último, para cada n , sea $\mathcal{I}_n: H^q \rightarrow H^p$ el operador de rango finito definido por

$$\mathcal{I}_n \phi(s) := \sum_{m=-n}^n \hat{\phi}(m) e^{2\pi i m s}$$

Se comprueba fácilmente que $\mathcal{I}_n \rightarrow \mathcal{I}$ cuando $n \rightarrow \infty$. Por tanto, $\mathcal{I}: H^q \rightarrow H^p$ es compacto. ■

Denotamos por $\mathcal{C}^k[0, 1]$ el espacio de las funciones reales, 1-periódicas y k veces continuamente diferenciables. El resultado siguiente se prueba en el Teorema 8.4 de R. Kress [56].

Teorema 1.5. Si k es un número natural, la norma $\|\cdot\|_k$ es equivalente en $\mathcal{C}^k[0, 1] \subset H^k$ a la norma

$$\|\|\phi\|\|_k := \left(\int_0^1 |\phi(s)|^2 ds + \int_0^1 |\phi^{(k)}(s)|^2 ds \right)^{1/2}$$

Una consecuencia del resultado anterior es que el espacio de Sobolev H^k es isomorfo al espacio de Sobolev clásico $H^k(0, 1)$, que es la completación con respecto a la norma $\|\|\cdot\|\|_k$ del espacio de funciones k veces continuamente diferenciables en $[0, 1]$.

Dado $p \in [0, \infty)$, denotamos por $H^{-p} \equiv H^{-p}[0, 1]$ el espacio dual de H^p , es decir,

$$H^{-p} := \{F: H^p \rightarrow \mathbb{R} \text{ lineal y continuo}\}$$

Teorema 1.6. Si $g \in L^2(0, 1)$, el producto de dualidad

$$G(\phi) := \int_0^1 \phi(s)g(s) ds \quad \forall \phi \in H^p$$

define un elemento de H^{-p} .

Prueba. La prueba se puede encontrar en R. Kress [56]. ■

El resultado anterior permite interpretar $L^2(0, 1)$ como un subespacio del espacio dual H^{-p} , para cada p . Como consecuencia, los polinomios trigonométricos son densos en H^{-p} . Además, si extendemos de manera adecuada la definición del producto escalar de H^p para $p < 0$, el espacio H^{-p} es de Hilbert. Cuando $p = 0$, la aplicación definida en el Teorema 1.6 es una isometría. Así, es posible identificar el espacio H^0 con su dual, y obtener una *escala de Hilbert* de espacios H^p , para todo $p \in \mathbb{R}$, con inclusión compacta de H^q en H^p cuando $q > p$.

Consideremos ahora la frontera Γ de un dominio acotado y simplemente conexo $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Suponemos que Γ es de clase \mathcal{C}^1 . Sea $\mathbf{x}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización regular de la curva Γ (sin pérdida de generalidad, podemos considerar como dominio de parámetros el intervalo $[0, 1]$):

$$\mathbf{x}(t) := (x_1(t), x_2(t)) \quad \forall t \in [0, 1]$$

Recordemos que \mathbf{x} se dice *regular* si $\mathbf{x}'(t) \neq \mathbf{0} \quad \forall t \in [0, 1]$.

A continuación, damos una definición de los espacios de Sobolev sobre una curva mediante un procedimiento global. Se puede probar que todas las definiciones que siguen son independientes de la representación paramétrica que se considere de la curva Γ .

Definición 1.7. Denotamos por $H^p(\Gamma)$, $p \in [0, \infty)$, el espacio de Sobolev

$$H^p(\Gamma) := \{\phi \in L^2(\Gamma) ; \phi \circ \mathbf{x} \in H^p\}$$

donde $(\phi \circ \mathbf{x})(t) := \phi(\mathbf{x}(t)) \quad \forall t \in [0, 1]$.

El producto escalar y la norma en $H^p(\Gamma)$ se definen a través del producto escalar en H^p :

$$(\phi, \psi)_{p,\Gamma} := (\phi \circ \mathbf{x}, \psi \circ \mathbf{x})_p \quad \forall \phi, \psi \in H^p(\Gamma)$$

Naturalmente, la norma asociada es

$$\|\phi\|_{p,\Gamma} := \|\phi \circ \mathbf{x}\|_p \quad \forall \phi \in H^p(\Gamma)$$

Teorema 1.8. Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ es de clase \mathcal{C}^2 . La aplicación $\gamma: H^1(\Omega) \rightarrow H^{1/2}$ definida como la única extensión lineal continua de la aplicación

$$\begin{aligned} \gamma &: \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \longrightarrow H^0 \\ u &\longmapsto \gamma(u) := u|_{\Gamma} \circ \mathbf{x} \end{aligned}$$

es suprayectiva.

Prueba. La prueba de este resultado se puede ver en R. Kress [56]. ■

Finalmente, en lo que sigue denotamos por $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}$ la extensión lineal continua del operador derivación.

1.2. Funciones armónicas en dominios no acotados del plano

Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo de \mathbb{R}^2 . Suponemos que la frontera de Ω , que denotamos Γ , es una curva de clase \mathcal{C}^∞ . Denotamos por $\Omega' := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ el exterior de Ω , y por \mathbf{n} el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω a Ω' . Dada una función $v: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}$, denotamos por $\frac{\partial v}{\partial \mathbf{n}} := \nabla v \cdot \mathbf{n}$ la derivada de v en la dirección normal \mathbf{n} . En esta sección, daremos una fórmula de representación para una función u armónica en Ω' , esto es, que satisface la ecuación de Laplace

$$-\Delta u = 0 \quad \text{en } \Omega'$$

y que tiene el comportamiento asintótico en el infinito

$$u = \mathcal{O}(1) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty \quad (1.1)$$

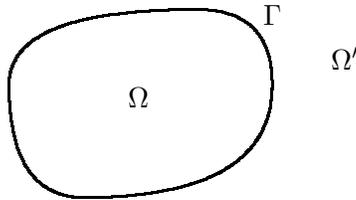


Figura 1.1: Dominio del problema

donde \mathcal{O} debe entenderse uniformemente en todas las direcciones $\mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, $\mathbf{x} \neq 0$. Nótese que este comportamiento implica que

$$|\nabla u(\mathbf{x})| \leq \frac{C}{|\mathbf{x}|}$$

para $|\mathbf{x}|$ suficientemente grande (cf. R. Kress [56]).

La función $U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ es la solución fundamental de la ecuación de Laplace. En efecto, derivando se tiene que para $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$ fijo,

$$-\Delta U(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0 \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{x} \neq \mathbf{y}$$

La mayoría de las propiedades básicas de las funciones armónicas se deducen usando la solución fundamental del operador de Laplace. Aplicando la fórmula de Green en Ω' a la función armónica u y a la solución fundamental $U(\cdot, \cdot)$, y teniendo en cuenta el comportamiento de u en el infinito, se obtiene la siguiente fórmula de representación (cf. W. Hackbusch [47], C. Chen y J. Zhou [15] o F.J. Sayas [83]).

Proposición 1.9. *Si u es una función armónica en Ω' con el comportamiento asintótico (1.1) en el infinito, entonces en cualquier punto $\mathbf{x} \in \Omega'$ se verifica que*

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \left(u(\mathbf{y}) \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| - \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} u(\mathbf{y}) \right) d\sigma_{\mathbf{y}} + c^*$$

donde c^* es una constante que depende de la función u .

De la fórmula anterior deducimos que u es una función de clase $\mathcal{C}^\infty(\Omega')$. Nótese que conocidos los valores de u y de su derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ sobre la frontera Γ , podemos calcular u en cualquier punto de Ω' . Además, el comportamiento asintótico de u implica que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} d\sigma = 0 \tag{1.2}$$

ya que en otro caso u tendría un comportamiento en el infinito del tipo $c \log |\mathbf{x}|$, con $c \neq 0$.

Las funciones definidas formalmente por

$$\widehat{\mathcal{V}}\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \phi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} \tag{1.3}$$

y

$$\widehat{\mathcal{K}}\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \phi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

son armónicas (y por tanto, analíticas) en $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$. Se llaman, respectivamente, *potenciales de simple y doble capa con densidad ϕ* . Para puntos \mathbf{x} en la frontera, la integral que define el operador de simple capa es singular. En general, la integral que define el operador de doble capa también lo es. Sin embargo, como la frontera Γ es de clase \mathcal{C}^∞ , en este caso el núcleo del operador de doble capa es una función de clase \mathcal{C}^∞ .

Pasando al límite cuando \mathbf{x} se aproxima a la frontera Γ en la fórmula de representación obtenida en la Proposición 1.9 y usando las condiciones de salto de los potenciales de simple y doble capa (cf. J.C. Nédélec [74], C. Chen y J. Zhou [15], W. Hackbusch [47]), se deduce la identidad

$$\frac{1}{2}u = \widehat{\mathcal{K}}u - \widehat{\mathcal{V}}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} + c^* \quad \text{sobre } \Gamma \quad (1.4)$$

Por otra parte, calculando el gradiente de u a partir de la fórmula de la Proposición 1.9 y pasando al límite cuando \mathbf{x} se aproxima a Γ , se tiene que

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} = -\widehat{\mathcal{W}}u - \widehat{\mathcal{K}}'\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (1.5)$$

donde el operador $\widehat{\mathcal{K}}'$ es el adjunto del operador de doble capa $\widehat{\mathcal{K}}$:

$$\widehat{\mathcal{K}}'\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \phi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

y $\widehat{\mathcal{W}}$ es la derivada normal del potencial de doble capa:

$$\widehat{\mathcal{W}}\phi(\mathbf{x}) := -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{x}}} \int_{\Gamma} \frac{\partial}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \phi(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

El operador $\widehat{\mathcal{W}}$ se conoce como *operador hipersingular*, ya que su núcleo tiene una singularidad no integrable que debemos interpretar en el sentido de Hadamard. En R. Kress [56] se prueba que $\widehat{\mathcal{W}}$ se puede expresar en términos del operador de simple capa $\widehat{\mathcal{V}}$:

$$\widehat{\mathcal{W}} = -\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} \widehat{\mathcal{V}} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} \quad (1.6)$$

En la relación anterior, $\boldsymbol{\tau}$ es el vector tangente a la curva Γ y $\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}}$ es la derivada en la dirección tangencial.

Sea $\boldsymbol{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una representación paramétrica 1-periódica de la curva Γ . Consideramos el operador $\mathcal{V}: H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}$ definido por

$$\mathcal{V}\xi(s) := \int_0^1 V(s,t) \xi(t) dt$$

donde $V(s, t) := -\frac{1}{2\pi} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|$. El operador \mathcal{V} se obtiene introduciendo el cambio de variable $\mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ en la integral que define al operador de simple capa $\widehat{\mathcal{V}}$ y poniendo $\xi(t) := \phi(\mathbf{x}(t))|\mathbf{x}'(t)|$. La integral que define el operador \mathcal{V} tiene una singularidad cuando $s = t$. Por tanto, la integral de Riemann no existe. Entendemos esta integral como una integral impropia, es decir,

$$\mathcal{V}\xi(s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_0^{s-\varepsilon} V(s, t) \xi(t) dt + \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{s+\varepsilon}^1 V(s, t) \xi(t) dt$$

Lema 1.10. *El operador lineal $\mathcal{V}: H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}$ es continuo. Además, existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$(\eta, \mathcal{V}\eta) \geq \beta \|\eta\|_{-1/2}^2 \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2}$$

donde $H_0^{-1/2}$ es el subespacio de $H^{-1/2}$ formado por las funciones de media nula, esto es,

$$H_0^{-1/2} := \{\eta \in H^{-1/2} ; (\eta, 1) = 0\}$$

Prueba. Las propiedades del operador $\mathcal{V}: H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}$ son una consecuencia de las propiedades del operador de simple capa clásico que se prueban en C. Chen y J. Zhou [15]. En efecto, sea $\mathbf{y}: [0, l] \rightarrow \mathbb{R}^2$ la parametrización de Γ por la longitud de arco, es decir, $\mathbf{y}(\cdot)$ verifica que

$$|\mathbf{y}'(t)| = 1 \quad \forall t \in [0, l]$$

Como la definición del operador \mathcal{V} es independiente de la representación paramétrica que se considere de Γ , se puede tomar la parametrización 1-periódica de la curva Γ dada por

$$\mathbf{x}(t) := \mathbf{y}(lt) \quad t \in [0, 1]$$

Claramente, $|\mathbf{x}'(t)| = l \quad \forall t \in [0, 1]$. Dada $\xi \in H^{-1/2}$, existe $\hat{\phi} \in H^{-1/2}(\Gamma)$ tal que $\xi = l \hat{\phi} \circ \mathbf{x}$. Entonces, el resultado es una consecuencia de la relación

$$\mathcal{V}\xi(s) = l \widehat{\mathcal{V}}\hat{\phi}(\mathbf{x}(s)) \quad \forall s \in [0, 1]$$

■

Consideramos también la siguiente versión parametrizada del operador de doble capa

$$\mathcal{K}g(s) := \int_0^1 K(s, t) g(t) dt$$

donde

$$K(s, t) := \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{\mathbf{n}(\mathbf{x}(t)) \cdot (\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t))}{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2} |\mathbf{x}'(t)| & \text{si } s \neq t \\ \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{x}''(t) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{x}(t))}{|\mathbf{x}'(t)|} & \text{si } s = t \end{cases}$$

El operador $\mathcal{K}: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}$ se obtiene parametrizando la integral que define el operador de doble capa clásico $\widehat{\mathcal{K}}$.

Lema 1.11. *El operador lineal $\mathcal{K}: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}$ es compacto.*

Prueba. Debido a la regularidad de la curva Γ , el núcleo del operador \mathcal{K} es una función 1-periódica en cada variable de clase \mathcal{C}^∞ . Por tanto, dada $v \in H^{1/2}$, $\mathcal{K}v$ es una función de clase \mathcal{C}^∞ . Luego el operador $\mathcal{K}: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}$ es compacto. ■

La relación (1.6) se puede expresar de una forma más conveniente empleando una parametrización de la curva Γ .

Lema 1.12. *Para cualesquiera $u, v \in H^1(\Omega)$, se verifica que*

$$\int_{\Gamma} \widehat{\mathcal{W}}u|_{\Gamma} v|_{\Gamma} d\sigma = \int_0^1 \mathcal{V}\gamma(u)' \gamma(v)' ds$$

Prueba. Dada $v \in H^1(\Omega)$, usando la regla de la cadena se ve que $\gamma(v)' = (\nabla v \circ \mathbf{x})\mathbf{x}'$. Por tanto, parametrizando se tiene que

$$\int_{\Gamma} \widehat{\mathcal{V}} \frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{\tau}} \frac{\partial v}{\partial \boldsymbol{\tau}} d\sigma = \int_0^1 \mathcal{V}\gamma(u)' \gamma(v)' ds \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

El resultado se deduce empleando la relación (1.6) e integrando por partes. ■

Capítulo 2

La ecuación de Poisson

En este capítulo presentamos una nueva versión del método simétrico de acoplamiento que permite calcular los términos de contorno mediante fórmulas de cuadratura sencillas y estudiar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Para poner de manifiesto las ideas esenciales del método, elegimos como modelo la ecuación de Poisson. En la formulación simétrica, todos los autores escogen como frontera de acoplamiento una curva poligonal. Sin embargo, en este caso no se sabe analizar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia.

En este trabajo, en cambio, utilizamos como frontera de acoplamiento una curva regular. De este modo, obtenemos una formulación equivalente a la dada por M. Costabel [20] y H. Han [48] (véase la sección 2.1) que facilita el uso de fórmulas de cuadratura elementales para aproximar los términos de contorno. En la sección 2.2, discretizamos el problema usando elementos finitos curvos en el dominio interior y *splines* periódicos de orden uno sobre la frontera. También probamos estimaciones óptimas del error para el problema discreto correspondiente. En la sección 2.3, proponemos un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de cuadratura numérica y probamos que se conserva el orden de convergencia. Además, en la sección 2.4 proponemos un algoritmo para resolver los sistemas a los que conduce esta formulación y en la sección 2.5, presentamos resultados de las experiencias numéricas realizadas. Finalmente, en la sección 2.6 estudiamos detalladamente el caso particular en que se toma como frontera de acoplamiento una circunferencia.

2.1. El problema modelo. Existencia y unicidad

Sea Ω_0 un dominio acotado en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ_0 es de Lipschitz. Denotamos por $\Omega'_0 := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}_0$. Dada $f \in L^2(\Omega'_0)$, de soporte compacto, buscamos una función $u: \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega'_0 \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\ u &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.1)$$

La idea del método de acoplamiento de elementos finitos y elementos de contorno consiste en introducir una curva auxiliar que divide el dominio Ω'_0 en dos regiones, una región interior acotada y la correspondiente región exterior no acotada, de modo que el problema es lineal y homogéneo en esta última. Después, se aplica el método de elementos finitos en el dominio interior acotado y el método de elementos de contorno en la región exterior no acotada.

Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo de \mathbb{R}^2 , cuya frontera Γ es de clase \mathcal{C}^∞ . Suponemos que el soporte de la función f y el dominio $\overline{\Omega}_0$ están contenidos en el interior de Ω . Denotamos por $\Omega^- := \Omega'_0 \cap \Omega$ y por $\Omega^+ := \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$. El límite o la traza sobre Γ de una función v definida en Ω^+ (Ω^-) se designa por v^+ (v^-). Entonces,

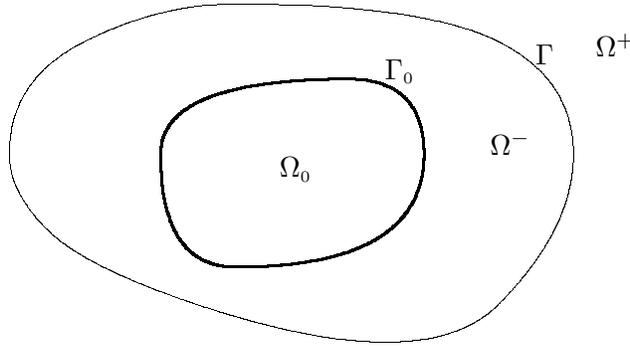


Figura 2.1: Dominio del problema de transmisión

el problema (2.1) es equivalente a un problema de transmisión, que consiste en un problema planteado en Ω^- :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f && \text{en } \Omega^- \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (2.2)$$

y un problema *homogéneo* formulado en Ω^+ :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 & \text{en } \Omega^+ \\ u &= \mathcal{O}(1) & \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (2.3)$$

acoplados mediante las *condiciones de transmisión* sobre Γ :

$$u^- = u^+ \quad \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} \quad (2.4)$$

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω^- a Ω^+ .

Sea V el subespacio de $H^1(\Omega^-)$ formado por las funciones de traza nula sobre Γ_0 :

$$V := \{v \in H^1(\Omega^-); v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Consideramos la forma bilineal $a: H^1(\Omega^-) \times H^1(\Omega^-) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) := \int_{\Omega^-} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \quad (2.5)$$

La formulación variacional del problema (2.2) consiste en hallar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} v^- \, d\sigma = \int_{\Omega^-} f v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V \quad (2.6)$$

Por otra parte, en virtud de la Proposición 1.9, conocidos u^+ y $\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}$, la solución del problema (2.3) se puede calcular en cualquier punto de Ω^+ empleando la representación integral

$$u(\mathbf{x}) = -\frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} u^+(\mathbf{y}) \frac{\partial \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} + \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \frac{\partial u^+(\mathbf{y})}{\partial \mathbf{n}_{\mathbf{y}}} \, d\sigma_{\mathbf{y}} + c$$

donde c es una constante que depende de u . Por tanto, si tenemos en cuenta las condiciones de transmisión (2.4), para resolver el problema (2.1) basta determinar la solución en el dominio acotado Ω^- y su derivada normal $\frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}$. Necesitamos una condición adicional que ligue estas dos incógnitas. Parece natural considerar la que se deduce de la fórmula de representación anterior cuando $\mathbf{x} \rightarrow \Gamma$ (véase (1.4)).

Las ecuaciones (2.6) y (1.4) constituyen la formulación dada por C. Johnson y J.C. Nédélec [54] en 1980. La formulación de M. Costabel [20] y H. Han [48] se obtiene al añadir la ecuación integral (1.5) a la formulación de Johnson y Nédélec.

Sea $\mathbf{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una parametrización 1-periódica de la curva Γ . Por simplicidad, en lo que sigue sustituimos la incógnita $\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}$ por

$$\xi := |\mathbf{x}'| \left(\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathbf{x} \right)$$

En virtud de (1.2), se tiene que $\xi \in H_0^{-1/2}$. Por otra parte, usando las condiciones de transmisión (2.4) y parametrizando, la ecuación (1.4) se transforma en

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma(u) + \mathcal{V}\xi - c = 0 \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (2.7)$$

donde $\mathcal{I}: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}$ es el operador identidad, y $\mathcal{V}: H^{-1/2} \rightarrow H^{1/2}$ y $\mathcal{K}: H^{1/2} \rightarrow H^{1/2}$ son, respectivamente, los operadores de capa simple y de capa doble definidos en la sección 1.2. Por otra parte, empleando el Lema 1.12 y parametrizando en la ecuación (1.5), tenemos que

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}'\right)\xi + \frac{d}{ds}\mathcal{V}\frac{d}{ds}\gamma(u) = \xi \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (2.8)$$

Para cualesquiera $\xi, \eta \in H^{-1/2}$ y $u, v \in H^1(\Omega^-)$, denotamos

$$b(\xi, \eta) := (\eta, \mathcal{V}\xi) \quad d(u, v) := b(\gamma(u)', \gamma(v)') \quad (2.9)$$

y

$$c(v, \eta) := \left(\eta, \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma(v)\right) \quad (2.10)$$

Parametrizando las integrales sobre Γ que aparecen en la formulación de Costabel y Han, y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, deducimos la formulación variacional del problema (2.1) siguiente:

hallar $u \in V$ y $\xi \in H_0^{-1/2}$ tales que

$$\begin{aligned} a(u, v) + d(u, v) - c(v, \xi) &= (f, v)_{0, \Omega^-} \quad \forall v \in V \\ c(u, \eta) + b(\xi, \eta) &= 0 \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2} \end{aligned} \quad (2.11)$$

La existencia y unicidad de solución del problema (2.11) son una consecuencia de las propiedades de los operadores de capa simple \mathcal{V} y de capa doble \mathcal{K} , como veremos a continuación. Designemos por $M := V \times H_0^{-1/2}$ y sean $\hat{u} := (u, \xi)$ y $\hat{v} := (v, \eta)$ dos elementos cualesquiera de M . El espacio M es de Hilbert dotado del producto escalar

$$(\hat{u}, \hat{v})_M := (u, v)_{1, \Omega^-} + (\xi, \eta)_{-1/2}$$

cuya norma asociada denotamos por $\|\cdot\|_M$. Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal continua dada por $L(\hat{v}) := (f, v)_{0, \Omega^-} \quad \forall \hat{v} \in M$ y consideremos la forma bilineal $A: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A(\hat{u}, \hat{v}) := a(u, v) + B(\hat{u}, \hat{v}) \quad \forall \hat{u}, \hat{v} \in M$$

donde

$$B(\hat{u}, \hat{v}) := d(u, v) - c(v, \xi) + c(u, \eta) + b(\xi, \eta) \quad \forall \hat{u}, \hat{v} \in M \quad (2.12)$$

Usando las notaciones anteriores, el problema (2.11) es equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u} \in M \text{ tal que} \\ &A(\hat{u}, \hat{v}) = L(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in M \end{aligned} \quad (2.13)$$

Proposición 2.1. *La forma bilineal $B: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. Además, se verifica la desigualdad*

$$B(\hat{v}, \hat{v}) \geq \beta \|\eta\|_{-1/2}^2 \quad \forall \hat{v} \in M \quad (2.14)$$

donde β es la constante del Lema 1.10.

Prueba. Los operadores $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$ y $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H_0^{-1/2}$ son continuos. Así, la continuidad de la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ se sigue de los Lemas 1.10 y 1.11. La desigualdad (2.14) se deduce aplicando el Lema 1.10 ya que

$$B(\hat{v}, \hat{v}) = b(\gamma(v)', \gamma(v)') + b(\eta, \eta) \geq \beta \|\eta\|_{-1/2}^2 \quad \forall \hat{v} \in M$$

■

Teorema 2.2. *El problema (2.11) tiene una única solución.*

Prueba. Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz y la Proposición 2.1, deducimos que la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ es continua. Por otra parte, como consecuencia de la desigualdad de Poincaré y de (2.14), la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ es elíptica en M . Luego, en virtud del Lema de Lax-Milgram, el problema (2.13) tiene una única solución $\hat{u} = (u, \xi)$, que es, a su vez, la única solución del problema (2.11). ■

2.2. Discretización y análisis del error

2.2.1. Triangulación exacta del dominio acotado

En este apartado, construimos una triangulación τ_h^- del dominio $\bar{\Omega}^-$ tal que la unión de todos los triángulos de τ_h^- es exactamente $\bar{\Omega}^-$. Por simplicidad en la exposición, en lo que sigue suponemos que la frontera Γ_0 es una curva poligonal. Dado un número natural $N > 0$, sea $h := 1/N$. Denotamos por $s_i := ih$ ($i \in \mathbb{Z}$) una partición uniforme de la recta real de paso h . Sea Ω_h el dominio poligonal determinado por la frontera Γ_0 y la curva poligonal obtenida al unir los puntos $\mathbf{x}(s_{i-1})$ y $\mathbf{x}(s_i)$, para $i = 1, \dots, N$. Consideramos una familia *regular* (cf. Ph.G. Ciarlet [17]) de triangulaciones τ_h de $\bar{\Omega}_h$ tal que cada triángulo $T \in \tau_h$ tiene a lo sumo dos vértices sobre

la frontera de Ω_h y existe una constante $C > 0$ tal que $h_T \leq Ch \ \forall T \in \tau_h$ (h_T es el diámetro del triángulo T). Si σ_h es el conjunto de vértices de la triangulación τ_h , suponemos que $\Delta_h := \sigma_h \cap \Gamma = \{\mathbf{x}(s_i)\}_{i=1}^N$. A partir de cada triangulación τ_h , obtenemos una triangulación τ_h^- del dominio $\bar{\Omega}^-$ sustituyendo cada triángulo $T \in \tau_h$ con dos vértices en Δ_h por el correspondiente triángulo curvo. La triangulación τ_h^- así obtenida se dice una triangulación *exacta* del dominio $\bar{\Omega}^-$.

Sea $T \in \tau_h^-$ un triángulo curvo de vértices \mathbf{a}_1 , \mathbf{a}_2 y \mathbf{a}_3 ; elegimos esta notación de modo que $\mathbf{a}_2 = \mathbf{x}(s_{i-1})$ y $\mathbf{a}_3 = \mathbf{x}(s_i)$, con $s_{i-1}, s_i \in [0, 1]$. Entonces, la aplicación $\varphi: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\varphi(s) := \mathbf{x}(s_{i-1} + sh) \quad s \in [0, 1]$$

es una parametrización del lado curvo de T .

Sea \hat{T} el triángulo de referencia, de vértices $\hat{\mathbf{a}}_1 := (0, 0)$, $\hat{\mathbf{a}}_2 := (1, 0)$ y $\hat{\mathbf{a}}_3 := (0, 1)$. Consideramos la aplicación afín $\mathbf{g}_T: \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\mathbf{g}_T(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, para $i = 1, 2, 3$, y la función $\phi_T: \hat{T} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$\phi_T(\hat{x}_1, \hat{x}_2) := \begin{cases} \frac{\hat{x}_1}{1 - \hat{x}_2} (\varphi(\hat{x}_2) - (1 - \hat{x}_2)\mathbf{a}_2 - \hat{x}_2\mathbf{a}_3) & \text{si } \hat{x}_2 \neq 1 \\ \hat{x}_1(\mathbf{a}_3 - \mathbf{a}_2 - \varphi'(1)) & \text{si } \hat{x}_2 = 1 \end{cases}$$

Definimos la aplicación $\mathbf{f}_T := \mathbf{g}_T + \phi_T$. Nótese que para $i = 1, 2, 3$, $\mathbf{f}_T(\hat{\mathbf{a}}_i) = \mathbf{a}_i$, y que la transformación \mathbf{f}_T lleva cada lado del triángulo de referencia \hat{T} sobre el lado correspondiente de T . En efecto, para cada $t \in [0, 1]$ se verifica que $\phi_T(0, t) = \phi_T(t, 0) = 0$ y $\mathbf{f}_T(t, 1 - t) = \varphi(t)$. En el Teorema 22.4 de A. Ženíšek [100] se prueba que para h suficientemente pequeño, la aplicación $\mathbf{f}_T: \hat{T} \rightarrow T$ es un difeomorfismo de clase C^∞ . Este tipo de transformación fue propuesto por M. Zlámal [103] y estudiado por R. Scott [86]. En lo sucesivo, si T es un triángulo recto, ponemos $\phi_T \equiv 0$, de manera que $\mathbf{f}_T = \mathbf{g}_T$ es la aplicación afín habitual.

Deseamos construir un espacio de elementos finitos asociado a la triangulación τ_h^- , que contiene triángulos curvos. Consideramos *elementos finitos curvos de Lagrange de orden uno*, es decir, un elemento finito sobre un triángulo curvo T de τ_h^- es una terna $(T, \mathcal{P}_1(T), \mathcal{N}_T)$, donde $\mathcal{P}_1(T)$ es el espacio de dimensión finita

$$\mathcal{P}_1(T) := \{p: T \rightarrow \mathbb{R} : p \circ \mathbf{f}_T \in \mathcal{P}_1(\hat{T})\}$$

Si T es un triángulo recto, $\mathcal{P}_1(T)$ es el espacio de los polinomios de grado inferior o igual a uno sobre T . Sin embargo, si T es un triángulo curvo, las funciones del espacio $\mathcal{P}_1(T)$ en general no son polinomios. El conjunto \mathcal{N}_T está formado por tres funcionales lineales, que denotamos N_1 , N_2 y N_3 , definidas por

$$N_j(\phi) := \phi(\mathbf{a}_j) \quad \forall \phi \in \mathcal{P}_1(T) \quad j = 1, 2, 3$$

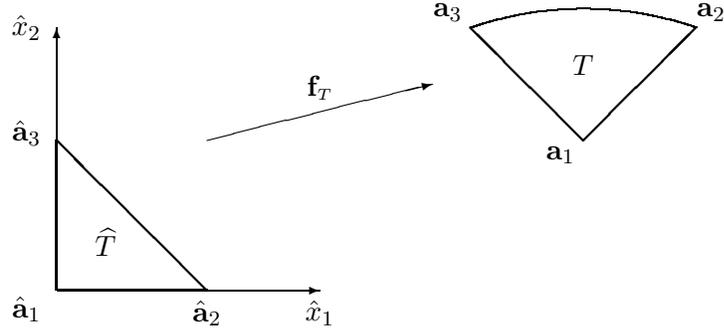


Figura 2.2: La transformación \mathbf{f}_T

Se comprueba fácilmente que el conjunto \mathcal{N}_T es $\mathcal{P}_1(T)$ -unisolvante, es decir, si una función $\phi \in \mathcal{P}_1(T)$ es tal que $N_j(\phi) = 0$, para $j = 1, 2, 3$, entonces $\phi \equiv 0$. Además, las funciones de $\mathcal{P}_1(T)$ están unívocamente determinadas sobre cada lado de T por los valores que toman en los extremos. Esta última propiedad es muy importante ya que permite combinar estos elementos con elementos finitos de Lagrange de orden uno sobre los triángulos rectos, obteniendo funciones continuas en $\bar{\Omega}^-$.

Asociamos a cada elemento finito $(T, \mathcal{P}_1(T), \mathcal{N}_T)$ el operador de interpolación de Lagrange $I_T: \mathcal{C}(T) \rightarrow \mathcal{P}_1(T)$ que a cada $v \in \mathcal{C}(T)$, asocia $I_T v \in \mathcal{P}_1(T)$ determinada por las condiciones

$$I_T v(\mathbf{a}_j) = v(\mathbf{a}_j) \quad j = 1, 2, 3$$

Para obtener cotas del error de interpolación sobre triángulos curvos usando las mismas técnicas que en el caso afín, es necesario conocer estimaciones de las derivadas de \mathbf{f}_T y de su inversa \mathbf{f}_T^{-1} . El resultado siguiente se prueba en el Teorema 22.4 de A. Ženíšek [100].

Lema 2.3. *Si la familia de triangulaciones $(\tau_h)_h$ es regular, para h suficientemente pequeño el jacobiano J_T de la transformación \mathbf{f}_T no se anula en una vecindad de \hat{T} y existen constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes de h , tales que*

$$C_1 h_T^2 \leq |J_T(\hat{\mathbf{x}})| \leq C_2 h_T^2 \quad \forall \hat{\mathbf{x}} \in \hat{T} \quad (2.15)$$

Además, se verifican las siguientes estimaciones

$$|\mathbf{f}_T|_{k, \infty, \hat{T}} \leq C h_T^k \quad (k = 1, 2) \quad y \quad |\mathbf{f}_T^{-1}|_{1, \infty, T} \leq C h_T^{-1} \quad (2.16)$$

A continuación, damos cotas del error de interpolación sobre triángulos curvos. Nótese que cuando el triángulo es recto, se obtienen las mismas estimaciones sustituyendo las normas del segundo miembro por las seminormas correspondientes.

Proposición 2.4. *Sea $T \in \tau_h^-$ un triángulo curvo. Si h es suficientemente pequeño, existen constantes $C_1, C_2 > 0$, independientes de T y de h , tales que*

$$\|v - I_T v\|_{1,T} \leq C_1 h_T \|v\|_{2,T} \quad \forall v \in H^2(T) \quad (2.17)$$

$$\|v - I_T v\|_{1,\infty,T} \leq C_2 h_T \|v\|_{2,\infty,T} \quad \forall v \in W^{2,\infty}(T) \quad (2.18)$$

Prueba. El resultado se deduce empleando las mismas técnicas que en el caso afín y el Lema 2.3. Los detalles pueden encontrarse en el Teorema 25.3 de A. Ženíšek [100] (también puede consultarse Ph.G. Ciarlet [16]). ■

2.2.2. Esquema discreto y estimaciones del error

Consideramos el espacio de elementos finitos

$$V_h := \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}^-); v_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau_h^- \quad \text{y} \quad v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Nótese que V_h es un subespacio de dimensión finita de V . Usando las estimaciones locales del error de interpolación (2.17), deducimos que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega^-} \leq Ch \|v\|_{2,\Omega^-} \quad \forall v \in V \cap H^2(\Omega^-) \quad (2.19)$$

Para aproximar la incógnita ξ , consideramos el espacio de dimensión finita

$$H_h := \{\eta_h \in H^0; \eta_i := \eta_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathbb{R} \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \text{y} \quad (\eta_h, 1) = 0\}$$

que es un subespacio de $H_0^{-1/2}$. La siguiente propiedad de aproximación se prueba en I.H. Sloan [89].

Lema 2.5. *Existe una constante C , independiente de h , tal que*

$$\inf_{\eta_h \in H_h} \|\eta - \eta_h\|_{-1/2} \leq Ch^\sigma \|\eta\|_{-1/2+\sigma} \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2} \cap H^{-1/2+\sigma} \quad 0 < \sigma \leq 1$$

El problema discreto asociado a la formulación variacional (2.11) consiste en

hallar $u_h \in V_h$ y $\xi_h \in H_h$ tales que

$$\begin{aligned} a(u_h, v_h) + d(u_h, v_h) - c(v_h, \xi_h) &= (f, v_h)_{0,\Omega^-} \quad \forall v_h \in V_h \\ c(u_h, \eta_h) + b(\xi_h, \eta_h) &= 0 \quad \forall \eta_h \in H_h \end{aligned} \quad (2.20)$$

Teorema 2.6. *El problema (2.20) tiene una única solución (u_h, ξ_h) . Además, si $u \in H^2(\Omega^-)$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega^-} + \|\xi - \xi_h\|_{-1/2} \leq Ch\|u\|_{2,\Omega^-}$$

Prueba. Sea $M_h := V_h \times H_h$. Entonces, el problema (2.20) es equivalente a

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h := (u_h, \xi_h) \in M_h \text{ tal que} \\ &A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = L(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h := (v_h, \eta_h) \in M_h \end{aligned} \tag{2.21}$$

Como M_h es un subespacio de dimensión finita de M , el problema (2.21) tiene una única solución. Por otra parte, gracias a las propiedades de la forma $A(\cdot, \cdot)$ (véase la prueba del Teorema 2.2), tenemos la estimación de Céa:

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq C \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_M \tag{2.22}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h . El resultado se deduce aplicando la desigualdad (2.19), el Lema 2.5 y un Teorema de traza. ■

Notamos que el método que presentamos aquí se puede generalizar sin dificultad al caso de aproximaciones de orden superior.

2.3. El efecto de la integración numérica

En la práctica, no es posible calcular de forma exacta algunos coeficientes del sistema (2.20), de modo que es necesario emplear fórmulas de cuadratura para calcularlos de forma aproximada. Por tanto, resolvemos un problema de la forma

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h^* := (u_h^*, \xi_h^*) \in M_h \text{ tal que} \\ &A_h(\hat{u}_h^*, \hat{v}_h) = L_h(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \tag{2.23}$$

donde $A_h(\cdot, \cdot)$ y $L_h(\cdot)$ son, respectivamente, perturbaciones de la forma bilineal $A(\cdot, \cdot)$ y de la forma lineal $L(\cdot)$ en M_h . En esta sección, describimos las fórmulas de integración numérica que empleamos, y estudiamos su efecto sobre la convergencia del método.

2.3.1. El esquema completamente discreto

Para calcular de forma aproximada los coeficientes en los que intervienen integrales sobre el dominio interior Ω^- , consideramos una fórmula de cuadratura sobre

el triángulo de referencia:

$$\widehat{Q}(\widehat{\phi}) := \sum_{l=1}^L \widehat{\omega}_l \widehat{\phi}(\widehat{\mathbf{b}}_l) \simeq \int_{\widehat{T}} \widehat{\phi}(\widehat{\mathbf{x}}) d\widehat{\mathbf{x}} \quad (2.24)$$

En lo que sigue, suponemos que la fórmula \widehat{Q} es exacta para funciones constantes, esto es, $\sum_{l=1}^L \widehat{\omega}_l = 1/2$. La fórmula correspondiente sobre cada triángulo $T \in \tau_h^-$ se obtiene mediante un cambio de variable:

$$Q_T(\phi) := \widehat{Q}(|J_T|(\phi \circ \mathbf{f}_T)) = \sum_{l=1}^L \widehat{\omega}_l |J_T(\widehat{\mathbf{b}}_l)| \phi(\mathbf{f}_T(\widehat{\mathbf{b}}_l)) \simeq \int_T \phi(\mathbf{x}) d\mathbf{x} \quad (2.25)$$

Definimos la forma bilineal $a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(\nabla u_h \cdot \nabla v_h) \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (2.26)$$

y la forma lineal $L_h: M_h \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$L_h(\widehat{v}_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(f v_h) \quad \forall \widehat{v}_h \in M_h \quad (2.27)$$

Para aproximar los coeficientes en los que aparecen integrales sobre el cuadrado unidad, consideramos la fórmula de cuadratura

$$\widehat{\ell}_2(g) \simeq \int_0^1 \int_0^1 g(s, t) ds dt \quad (2.28)$$

Suponemos que la fórmula $\widehat{\ell}_2$ es exacta para polinomios de grado inferior o igual a uno. En lo que sigue, empleamos esta fórmula de cuadratura para definir perturbaciones $b_h(\cdot, \cdot)$, $d_h(\cdot, \cdot)$ y $c_h(\cdot, \cdot)$ de las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$, $d(\cdot, \cdot)$ y $c(\cdot, \cdot)$.

Para $i = 1, \dots, N$, denotamos por μ_i la función 1-periódica que sobre el intervalo $[0, 1]$ está dada por

$$\mu_i(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s \in (s_{i-1}, s_i) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

El conjunto $\{\mu_i - \mu_{i+1}\}_{i=1}^{N-1}$ es una base del espacio H_h . Por tanto, dados $\xi_h, \eta_h \in H_h$, para calcular una aproximación $b_h(\xi_h, \eta_h)$ de $b(\xi_h, \eta_h)$, basta definir un esquema de cuadratura para aproximar los coeficientes

$$b_{i,j} := b(\mu_i, \mu_j) = -\frac{1}{4\pi} \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2 ds dt$$

para $i, j = 1, \dots, N$. Debido a la periodicidad de la función \mathbf{x} , los coeficientes $b_{i,j}$ se pueden definir para cualquier par de enteros (i, j) módulo N . Daremos un esquema para aproximar los coeficientes correspondientes a índices (i, j) en el conjunto $\mathcal{I} := \{(i, j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}; |i - j| \leq N/2\}$, por razones que quedarán claras más adelante. Entonces, para $(i, j) \in \mathcal{I}$, efectuamos la descomposición:

$$b_{i,j} = -\frac{1}{4\pi} \left(\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} F(s, t) ds dt + \int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log(s-t)^2 ds dt \right)$$

donde

$$F(s, t) := \begin{cases} \log \frac{|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(t)|^2}{(s-t)^2} & \text{si } s \neq t \\ \log |\mathbf{x}'(s)|^2 & \text{si } s = t \end{cases}$$

Notamos que la función F es de clase \mathcal{C}^∞ en $\{(s, t) \in \mathbb{R}^2; |s - t| < 1\}$. Por tanto, cuando $(i, j) \in \mathcal{I}$, el primer término de la descomposición se puede aproximar mediante la fórmula $\hat{\ell}_2$, esto es,

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} F(s, t) ds dt \simeq h^2 \hat{\ell}_2(F(s_{i-1} + h \cdot, s_{j-1} + h \cdot))$$

Por otra parte, operando se tiene que

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \log(s-t)^2 ds dt = h^2 (\log h^2 + B_{i-j})$$

donde para cada $k \in \mathbb{Z}$,

$$B_k := \int_0^1 \int_0^1 \log(k+s-t)^2 ds dt \tag{2.29}$$

Las constantes B_k son independientes de la curva Γ y se pueden calcular de forma exacta, si bien, como indicamos en la nota siguiente, suelen calcularse de forma aproximada. Además, se verifica que $B_k = B_{-k}$, para cualquier $k \in \mathbb{Z}$. Por tanto, la segunda parte de la descomposición da lugar a una matriz de Toeplitz simétrica, independiente del problema.

Nota.- En *G.C. Hsiao et al. [51]* (véase también *F.J. Sayas [83]*), las constantes B_k se calculan de la manera siguiente:

$$B_0 = -3 \quad B_1 = 4 \log 2 - 3$$

y para $k \geq 2$,

$$B_k = \log k^2 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(2n+1)} \frac{1}{k^{2n}} \tag{2.30}$$

Existe una expresión explícita, pero su evaluación es muy inestable debido a que en ella intervienen diferencias de cantidades muy grandes. Es más recomendable sumar la serie (2.30) de forma aproximada.

Para $i, j = 1, \dots, N$, calculamos

$$\tilde{b}_{i,j} := -\frac{1}{4\pi} h^2 (\hat{\ell}_2(F(s_{i-1} + h \cdot, s_{j-1} + h \cdot)) + \log h^2 + B_{i-j})$$

donde

$$(\underline{i}, \underline{j}) := \begin{cases} (i, j) & \text{si } (i, j) \in \mathcal{I} \\ (i, j + N) & \text{si } i - j > N/2 \\ (i, j - N) & \text{si } j - i > N/2 \end{cases} \quad (2.31)$$

Entonces, la forma bilineal aproximada $b_h: H_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$b_h(\xi_h, \eta_h) := \sum_{i,j=1}^N \xi_i \eta_j \tilde{b}_{i,j} \quad \forall \xi_h, \eta_h \in H_h$$

Recordamos que para $\eta_h \in H_h$, denotamos por $\eta_i := \eta_h|_{(s_{i-1}, s_i)}$.

Para definir una aproximación de la forma bilineal $d(\cdot, \cdot)$ en $V_h \times V_h$, notamos que, por construcción, si $v_h \in V_h$, entonces $\gamma(v_h) \in T_h$, siendo

$$T_h := \{\eta_h \in \mathcal{C}(\mathbb{R}) ; \eta_h(s) = \eta_h(s+1) \quad \forall s \in \mathbb{R} \quad \text{y} \quad \eta_h|_{(s_{i-1}, s_i)} \in \mathcal{P}_1 \quad \forall i \in \mathbb{Z}\} \quad (2.32)$$

Sea $\{l_i\}_{i=1}^N$ la base nodal de T_h , es decir, las funciones de T_h que satisfacen

$$l_i(s_j) = \delta_{i,j} \quad i, j = 1, \dots, N$$

Entonces, basta dar un esquema para aproximar los coeficientes $d_{i,j} := b(l'_i, l'_j)$, para $i, j = 1, \dots, N$. Derivando en el sentido de distribuciones, tenemos que

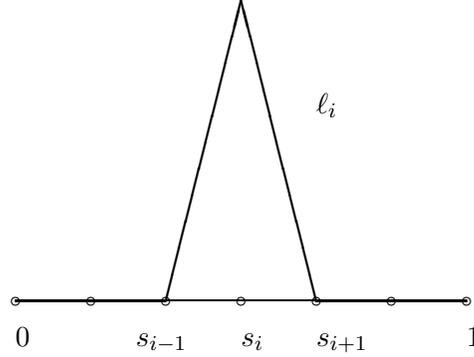
$$d_{i,j} = \frac{1}{h^2} (b_{i,j} - b_{i,j+1} - b_{i+1,j} + b_{i+1,j+1}) \quad i, j = 1, \dots, N$$

Entonces, si llamamos

$$\tilde{d}_{i,j} := \frac{1}{h^2} (\tilde{b}_{i,j} - \tilde{b}_{i,j+1} - \tilde{b}_{i+1,j} + \tilde{b}_{i+1,j+1}) \quad i, j = 1, \dots, N$$

la forma bilineal aproximada $d_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por

$$d_h(u_h, v_h) := \sum_{i,j=1}^N \gamma u(s_i) \gamma v(s_j) \tilde{d}_{i,j} \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (2.33)$$

Figura 2.3: Las funciones l_i

Queda definir una aproximación de la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$ en $V_h \times H_h$. Sean $v_h \in V_h$ y $\eta_h \in H_h$. Calculamos $(\eta_h, \gamma v_h)$ de forma exacta. Así, solo hay que dar un esquema para aproximar los coeficientes

$$c_{i,j} := \int_{s_{j-1}}^{s_j} \left(\int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} K(s,t) l_i(t) dt \right) ds \quad i, j = 1, \dots, N$$

Como el núcleo del operador de capa doble \mathcal{K} es una función de clase \mathcal{C}^∞ , empleamos la fórmula $\hat{\ell}_2$ para definir las aproximaciones

$$\tilde{c}_{i,j} := h^2 \hat{\ell}_2(K(s_{j-1} + h\cdot, s_{i-1} + h\cdot) l_i(s_{i-1} + h\cdot) + K(s_{j-1} + h\cdot, s_i + h\cdot) l_i(s_i + h\cdot))$$

Definimos la forma bilineal $c_h: V_h \times H_h \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c_h(v_h, \eta_h) := \frac{h}{4} \sum_{j=1}^N \eta_j (\gamma v(s_{j-1}) + \gamma v(s_j)) - \sum_{i,j=1}^N \eta_j \gamma v(s_i) \tilde{c}_{i,j}$$

El esquema completamente discreto asociado al problema (2.11) consiste en resolver el sistema (2.23) con la forma $L_h(\cdot)$ dada por (2.27) y con

$$A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) := a_h(u_h, v_h) + B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \quad (2.34)$$

donde para $\hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$,

$$B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) := d_h(u_h, v_h) - c_h(v_h, \xi_h) + c_h(u_h, \eta_h) + b_h(\xi_h, \eta_h) \quad (2.35)$$

2.3.2. Estimaciones del error

En este apartado analizamos el efecto del uso de fórmulas de cuadratura sobre la convergencia y deducimos estimaciones del error. El siguiente Lema auxiliar se empleará para probar algunos resultados. Su prueba puede encontrarse en A. Ženíšek [100, Lema 26.7].

Lema 2.7. *Sea T un triángulo de τ_h^- y supongamos que $f \in W^{1,\infty}(T)$. Entonces existe una constante C , independiente de T y de f , tal que*

$$\left| \int_T fp \, d\mathbf{x} - Q_T(fp) \right| \leq Ch_T \text{med}(T)^{1/2} \|f\|_{1,\infty,T} \|p\|_{1,T} \quad \forall p \in \mathcal{P}_1(T)$$

Teorema 2.8. *Si $f \in W^{1,\infty}(\Omega^-)$, entonces existe una constante C , independiente de h , tal que*

$$|L(\hat{v}_h) - L_h(\hat{v}_h)| \leq Ch \|f\|_{1,\infty,\Omega^-} \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{v}_h \in M_h$$

Prueba. Basta aplicar el Lema 2.7 en cada triángulo de τ_h^- y utilizar la desigualdad de Cauchy-Schwarz. ■

Proposición 2.9. *Existe una constante C , independiente de h , tal que*

$$|B(\hat{u}_h, \hat{v}_h) - B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h)| \leq Ch \|\hat{u}_h\|_M \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

Prueba. En el Lema 11 de M. Crouzeix y F.J. Sayas [25], se prueba que existe una constante C , independiente de h , tal que

$$|b(\xi_h, \eta_h) - b_h(\xi_h, \eta_h)| \leq Ch \|\xi_h\|_{-1/2} \|\eta_h\|_{-1/2} \quad \forall \xi_h, \eta_h \in H_h$$

Como los operadores $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H_0^{-1/2}$ y $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$ son continuos, deducimos que existe una constante C , independiente de h , tal que

$$|d(u_h, v_h) - d_h(u_h, v_h)| \leq Ch \|u_h\|_{1,\Omega^-} \|v_h\|_{1,\Omega^-} \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (2.36)$$

Por último, en el Lema 5.3 de S. Meddahi [67] se muestra que existe una constante C , independiente de h , tal que para cualesquiera $v_h \in V_h$ y $\eta_h \in H_h$,

$$|c(v_h, \eta_h) - c_h(v_h, \eta_h)| \leq Ch^{3/2} \|v_h\|_{1,\Omega^-} \|\eta_h\|_{-1/2}$$

El resultado se deduce empleando la desigualdad triangular. ■

Teorema 2.10. *Existe una constante C , independiente de h , tal que*

$$|A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) - A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h)| \leq Ch \|\hat{u}_h\|_M \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

Prueba. En virtud de la Proposición 2.9, basta probar que existe una constante C , independiente de h , tal que

$$|a(u_h, v_h) - a_h(u_h, v_h)| \leq Ch \|u_h\|_{1, \Omega^-} \|v_h\|_{1, \Omega^-} \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (2.37)$$

Para ello es suficiente ver que existe una constante $C > 0$ tal que para cualquier triángulo curvo $T \in \tau_h^-$,

$$|a_T(u, v) - a_{h,T}(u, v)| \leq Ch \|u\|_{1,T} \|v\|_{1,T} \quad \forall u, v \in \mathcal{P}_1(T) \quad (2.38)$$

donde $a_T(u, v) := \int_T \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$ y $a_{h,T}(u, v) := Q_T(\nabla u \cdot \nabla v)$.

A cada función $w \in \mathcal{P}_1(T)$, le asociamos la función afín $\bar{w}: T \rightarrow \mathbb{R}$ unívocamente determinada por las condiciones

$$\bar{w}(\mathbf{a}_i) = w(\mathbf{a}_i) \quad i = 1, 2, 3$$

La función w interpola a \bar{w} en $\mathcal{P}_1(T)$. Luego, por la Proposición 2.4, teniendo en cuenta que \bar{w} es afín,

$$\|\bar{w} - w\|_{1,T} \leq Ch \|\bar{w}\|_{1,T} \quad \text{y} \quad \|\bar{w} - w\|_{1, \infty, T} \leq Ch \|\bar{w}\|_{1, \infty, T} \quad (2.39)$$

Además, usando la desigualdad triangular, resulta que para h suficientemente pequeño,

$$\|\bar{w}\|_{1,T} \leq C \|w\|_{1,T} \quad \text{y} \quad \|\bar{w}\|_{1, \infty, T} \leq C \|w\|_{1, \infty, T} \quad (2.40)$$

Sean $u, v \in \mathcal{P}_1(T)$ y sea h suficientemente pequeño. Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, (2.39)₁ y (2.40)₁, se tiene que:

$$|a_T(u, v) - a_T(\bar{u}, \bar{v})| \leq |u - \bar{u}|_{1,T} |v|_{1,T} + |\bar{u}|_{1,T} |v - \bar{v}|_{1,T} \leq Ch \|u\|_{1,T} \|v\|_{1,T} \quad (2.41)$$

Por otro lado, en virtud de (2.39)₂, (2.40)₂ y (2.15), tenemos que

$$|a_{h,T}(\bar{u}, \bar{v}) - a_{h,T}(u, v)| \leq Ch \, \text{med}(T) \|u\|_{1, \infty, T} \|v\|_{1, \infty, T} \leq Ch \|u\|_{1,T} \|v\|_{1,T} \quad (2.42)$$

donde en la última desigualdad utilizamos que

$$\text{med}(T)^{1/2} \|w\|_{1, \infty, T} \leq C \|w\|_{1,T} \quad \forall w \in \mathcal{P}_1(T)$$

Por último, aplicando el Lema 2.7 y la desigualdad (2.40)₁, deducimos que

$$|a_T(\bar{u}, \bar{v}) - a_{h,T}(\bar{u}, \bar{v})| \leq Ch \, \text{med}(T) |\bar{u}|_{1, \infty, T} |\bar{v}|_{1, \infty, T} \leq Ch \|u\|_{1,T} \|v\|_{1,T} \quad (2.43)$$

La desigualdad (2.38) es una consecuencia de las desigualdades (2.41), (2.42) y (2.43). ■

Usando el Teorema anterior, se prueba que la forma bilineal $A_h(\cdot, \cdot)$ es elíptica en M_h cuando h es suficientemente pequeño. En efecto, si $\hat{v}_h \in M_h$, por el Teorema 2.10 y la elipticidad de la forma $A(\cdot, \cdot)$, se tiene que

$$A_h(\hat{v}_h, \hat{v}_h) \geq (\tilde{\alpha} - Ch)\|\hat{v}_h\|_M^2$$

Por tanto, el esquema completamente discreto (2.23) con $A_h(\cdot, \cdot)$ y $L_h(\cdot)$ dadas por (2.34) y (2.27), respectivamente, tiene una única solución (u_h^*, ξ_h^*) , cuando h es suficientemente pequeño.

Teorema 2.11. *Supongamos que $f \in W^{1,\infty}(\Omega^-)$ y $u \in H^2(\Omega^-)$. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|u - u_h^*\|_{1,\Omega^-} + \|\xi - \xi_h^*\|_{-1/2} \leq Ch(\|u\|_{2,\Omega^-} + \|f\|_{1,\infty,\Omega^-})$$

para h suficientemente pequeño.

Prueba. En virtud del Lema de Strang (cf. G. Strang [90]), sabemos que si h es suficientemente pequeño, existe una constante C , independiente de h , tal que

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \hat{u}_h^*\|_M &\leq C \sup_{\hat{\omega}_h \in M_h} \frac{|L(\hat{\omega}_h) - L_h(\hat{\omega}_h)|}{\|\hat{\omega}_h\|_M} \\ &+ C \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \left(\sup_{\hat{\omega}_h \in M_h} \frac{|A(\hat{v}_h, \hat{\omega}_h) - A_h(\hat{v}_h, \hat{\omega}_h)|}{\|\hat{\omega}_h\|_M} + \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_M \right) \end{aligned}$$

El resultado es una consecuencia de los Teoremas 2.8, 2.6 y 2.10. ■

2.4. Un algoritmo para resolver el problema

Una vez elegidas las fórmulas de cuadratura, el sistema resultante se puede implantar directamente en el ordenador. Dicho sistema es definido positivo y no simétrico. Conviene cambiar de signo la segunda ecuación para obtener un sistema simétrico y no definido (véase el sistema (2.44)), que puede resolverse usando el método de Uzawa o el de Lagrangiana aumentada (ver, por ejemplo, V. Girault y P.A. Raviart [40], Ph.G. Ciarlet [17], M. Fortin y R. Glowinski [30]).

En esta sección proponemos un algoritmo para resolver este tipo de sistemas basado en una técnica de preconditionamiento debida a J.H. Bramble y J.E. Pasciak [9]. La idea es transformar (mediante operaciones de filas) el sistema original en un sistema equivalente, de forma que el nuevo sistema es simétrico y definido positivo

en cierto producto escalar. Por tanto, el sistema resultante se puede resolver usando un método de gradiente conjugado preconditionado. Utilizaremos el Teorema de comparación dado en [9] para probar que el nuevo sistema se puede preconditionar fácilmente.

A continuación fijamos algunas notaciones que usaremos a lo largo de este apartado. Sea X un espacio de dimensión finita dotado del producto escalar (\cdot, \cdot) . Si $\mathcal{A}: X \rightarrow X$ es un operador lineal, simétrico y definido positivo, la forma bilineal

$$(u, v)_{\mathcal{A}} := (\mathcal{A}u, v) \quad \forall u, v \in X$$

define un producto escalar en X . La norma inducida por este producto escalar se denota por $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$, esto es,

$$\|v\|_{\mathcal{A}} = \sqrt{(\mathcal{A}v, v)} \quad \forall v \in X$$

Sean $\mathcal{A}, \mathcal{D}: V_h \rightarrow V_h$, $\mathcal{B}: H_h \rightarrow H_h$ y $\mathcal{C}: V_h \rightarrow H_h$ los operadores definidos mediante las relaciones siguientes, que se verifican para cualesquiera $u_h, v_h \in V_h$ y $\xi_h, \eta_h \in H_h$:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}u_h, v_h)_{0, \Omega^-} &= a(u_h, v_h) & (\mathcal{B}\xi_h, \eta_h) &= b(\xi_h, \eta_h) \\ (\mathcal{D}u_h, v_h)_{0, \Omega^-} &= d(u_h, v_h) & (\mathcal{C}v_h, \eta_h) &= -c(v_h, \eta_h) \end{aligned}$$

Gracias a las propiedades de las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $b(\cdot, \cdot)$, los operadores \mathcal{A} y \mathcal{B} son autoadjuntos y definidos positivos; el operador \mathcal{D} es autoadjunto y semidefinido positivo. Sea F la proyección ortogonal de f en $L^2(\Omega^-)$ sobre V_h , es decir, $F \in V_h$ satisface la relación

$$(F, v_h)_{0, \Omega^-} = (f, v_h)_{0, \Omega^-} \quad \forall v_h \in V_h$$

Si denotamos por \mathcal{C}' el operador adjunto de \mathcal{C} , el problema discreto (2.20) se puede escribir como sigue:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{D} & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C} & -\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

Nótese que la segunda ecuación del problema (2.20) ha sido cambiada de signo, de forma que el sistema (2.44) es simétrico y no definido.

En el resultado siguiente se establece que los operadores \mathcal{A} y $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ son *espectralmente equivalentes*, esto es, las normas asociadas a estos operadores son equivalentes, independientemente del parámetro h . Como consecuencia, estos operadores tienen los mismos preconditionadores.

Lema 2.12. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|v_h\|_{\mathcal{A}} \leq \|v_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}} \leq C\|v_h\|_{\mathcal{A}} \quad \forall v_h \in V_h$$

Prueba. La primera desigualdad se deduce aplicando el Lema 1.10. La segunda desigualdad es una consecuencia del Lema 1.10, la continuidad de los operadores $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H_0^{-1/2}$ y $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$ y la desigualdad de Poincaré. ■

Sea \mathcal{R} un preconditionador del operador \mathcal{A} . Entonces existen constantes positivas, α_0 y α_1 , tales que

$$\alpha_0\|v_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}}^2 \leq \|v_h\|_{\mathcal{R}}^2 \leq \alpha_1\|v_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}}^2 \quad \forall v_h \in V_h$$

Suponemos que $\alpha_1 < 1$. El operador \mathcal{R} puede no satisfacer esta condición. En tal caso, es sencillo calcular un factor de escala adecuado de modo que el preconditionador *escalado* sí la satisface. Por tanto, esta hipótesis no supone ninguna restricción.

Efectuando operaciones de filas, obtenemos el nuevo sistema:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{D}) & \mathcal{R}^{-1}\mathcal{C}' \\ \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{D}) - \mathcal{C} & \mathcal{B} + \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{C}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}F \\ \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}F \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Llamaremos \mathcal{S} al operador del primer miembro y G al término independiente.

Sea $\alpha := 1 - \alpha_0$. Entonces, para $v_h \in V_h$, $v_h \neq 0$, se tiene que

$$0 < \|v_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}-\mathcal{R}}^2 \leq \alpha\|v_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}}^2$$

Por tanto, la forma bilineal

$$\left[\begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right] := ((\mathcal{A} + \mathcal{D} - \mathcal{R})u_h, v_h)_{0,\Omega^-} + (\xi_h, \eta_h) \quad (2.46)$$

define un producto escalar en M_h . Es inmediato comprobar que el operador \mathcal{S} es autoadjunto en el producto escalar $[\cdot, \cdot]$, es decir,

$$\left[\mathcal{S} \begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right] = \left[\begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix}, \mathcal{S} \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right] \quad \forall (u_h, \xi_h), (v_h, \eta_h) \in M_h$$

El resultado siguiente es de gran utilidad ya que facilita la búsqueda de preconditionadores del operador \mathcal{S} . Su prueba puede consultarse en J.H. Bramble y J.E. Pasciak [9, Teorema 1].

Lema 2.13. Sea $\mathcal{I}: V_h \rightarrow V_h$ el operador identidad y sea

$$\tilde{\mathcal{S}} := \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}' + \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Para cualquier par $(v_h, \eta_h) \in M_h$, se verifican las desigualdades siguientes:

$$\lambda_0 \left[\tilde{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right] \leq \left[\mathcal{S} \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right] \leq \lambda_1 \left[\tilde{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} v_h \\ \eta_h \end{pmatrix} \right]$$

donde

$$\lambda_0 = \left(1 + \frac{\alpha}{2} + \sqrt{\alpha + \frac{\alpha^2}{4}} \right)^{-1} \quad y \quad \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

En el Lema anterior se establece que los operadores \mathcal{S} y $\tilde{\mathcal{S}}$ son espectralmente equivalentes. Como consecuencia, cualquier preconditionador del operador $\tilde{\mathcal{S}}$ es también un preconditionador del operador \mathcal{S} . Así, el problema de encontrar un preconditionador para el sistema (2.45) se reduce al de construir un preconditionador del operador $\mathcal{B} + \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'$. A continuación, probamos que los operadores \mathcal{B} y $\mathcal{B} + \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'$ son espectralmente equivalentes.

Proposición 2.14. Existe una constante C , independiente de h , tal que

$$\|\eta_h\|_{\mathcal{B}} \leq \|\eta_h\|_{\mathcal{B} + \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'} \leq C \|\eta_h\|_{\mathcal{B}} \quad \forall \eta_h \in H_h$$

Prueba. Como el operador $\mathcal{A} + \mathcal{D}$ es definido positivo,

$$\|\eta_h\|_{\mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'}^2 = \|\mathcal{C}'\eta_h\|_{(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}}^2 \geq 0 \quad \forall \eta_h \in H_h$$

de donde se sigue la primera desigualdad.

Por otra parte, notamos que

$$\begin{aligned} \|\eta_h\|_{\mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'}^2 &= \|(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'\eta_h\|_{\mathcal{A} + \mathcal{D}}^2 \\ &= \sup_{v_h \in V_h} \frac{((\mathcal{A} + \mathcal{D})(\mathcal{A} + \mathcal{D})^{-1}\mathcal{C}'\eta_h, v_h)_{0, \Omega^-}}{\|v_h\|_{\mathcal{A} + \mathcal{D}}^2} \\ &= \sup_{v_h \in V_h} \frac{(\eta_h, \mathcal{C}v_h)^2}{\|v_h\|_{\mathcal{A} + \mathcal{D}}^2} \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta la definición del operador \mathcal{C} , el Lema 1.11 y la continuidad de $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$,

$$|(\eta_h, \mathcal{C}v_h)| \leq C \|v_h\|_{1, \Omega^-} \|\eta_h\|_{-1/2}$$

El resultado se sigue de la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_{1,\Omega^-}$ y $\|\cdot\|_{\mathcal{A}+\mathcal{D}}$ en V_h y del Lema 1.10. ■

En virtud del Lema 2.13 y de la Proposición 2.14, el operador \mathcal{S} es definido positivo en el producto escalar $[\cdot, \cdot]$. Luego el sistema (2.45) se puede resolver mediante cualquiera de los métodos conocidos para resolver sistemas lineales, simétricos y definidos positivos. En particular, puede utilizarse un método de gradiente conjugado preconditionado. Por la Proposición 2.14, si \mathcal{P} es un preconditionador de \mathcal{B} , la solución del sistema (2.45) se puede calcular resolviendo el sistema

$$\tilde{\mathcal{P}}^{-1}\mathcal{S} \begin{pmatrix} u_h \\ \xi_h \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}^{-1}G \quad \tilde{\mathcal{P}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

usando el algoritmo de gradiente conjugado en el producto escalar $[\mathcal{S}\cdot, \cdot]$. Nótese que de esta manera el problema queda desacoplado ya que en cada iteración resolvemos de forma independiente un problema usando el método de elementos de contorno y un problema por el método de elementos finitos. En resumen, para resolver el sistema (2.20) mediante el método que acabamos de describir, es necesario disponer de un preconditionador del operador \mathcal{A} y de un preconditionador del operador \mathcal{B} .

2.5. Experiencias numéricas

Hemos utilizado el algoritmo descrito en la sección 2.4 para calcular una solución aproximada del problema siguiente:

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega'_0 \\ u &= \frac{x}{x^2 + y^2} && \text{sobre } \Gamma_0 \\ u &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |x| \rightarrow \infty \end{aligned} \tag{2.47}$$

donde $\Omega_0 := [-0,5, 0,5] \times [-0,5, 0,5]$.

Elegimos como frontera de acoplamiento la elipse $x^2 + 4y^2 = 9$. Consideramos los preconditionadores $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ y $\mathcal{P} = \mathcal{B}$. El criterio de parada se impone sobre la norma del residuo. Para una tolerancia de 10^{-6} , obtuvimos los resultados que se muestran en la Tabla 2.1. Notamos que el método iterativo utilizado es óptimo puesto que el número de iteraciones es independiente del paso de discretización.

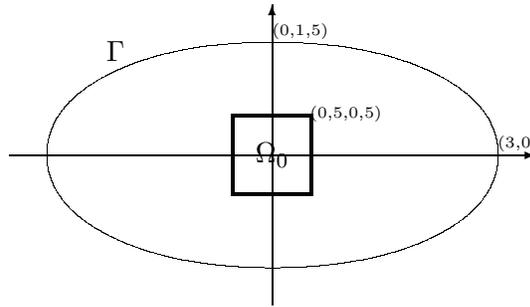


Figura 2.4: Dominio del problema

h	Iteraciones	$ u - u_h _{1,\Omega^-}$
1/8	7	$2,69 \cdot 10^{-1}$
1/16	8	$1,78 \cdot 10^{-1}$
1/32	8	$6,61 \cdot 10^{-2}$
1/64	8	$3,43 \cdot 10^{-2}$
1/128	7	$1,82 \cdot 10^{-2}$

Cuadro 2.1: Convergencia en función del parámetro h

2.6. El caso de una frontera auxiliar circular

En algunos problemas de geometría especial, es posible escoger como frontera auxiliar Γ una circunferencia, sin que esto suponga un aumento excesivo de la dimensión del sistema que debemos resolver. En este caso, la derivada normal de la solución sobre Γ se puede expresar de forma explícita en términos de la traza de u , como veremos a continuación. De este modo, para resolver el problema (2.1) solo hay que determinar la solución en el dominio interior Ω^- . G.C. Hsiao y S. Zhang [53] aprovecharon esta simplificación para obtener una formulación variacional más sencilla del método de acoplamiento de elementos finitos y elementos de contorno que se conoce como *the uncoupling procedure*.

2.6.1. La formulación variacional

En lo que sigue, Γ es la circunferencia de centro el origen y de radio R . Suponemos que R es suficientemente grande de modo que el dominio $\overline{\Omega}_0$ y el soporte de la función f están contenidos en la región acotada por Γ . Recordemos que denotamos por Ω^- el dominio acotado por las curvas Γ_0 y Γ , y llamamos Ω^+ a la región no acotada exterior a Γ ; \mathbf{n} es el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω^- a Ω^+ .

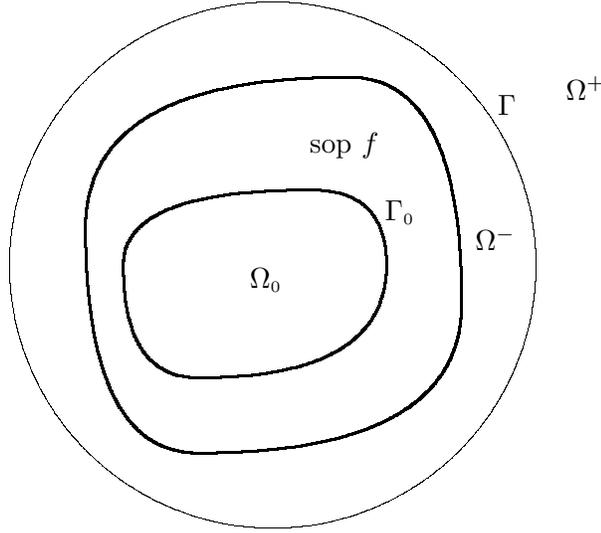


Figura 2.5: Dominio del problema de transmisión

Empleando propiedades de los operadores integrales, se deduce la siguiente relación entre la derivada normal $\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}$ y la traza de la solución sobre Γ (cf. G.C. Hsiao y S. Zhang [53], S. Meddahi [66]):

$$\frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} = -2\mathcal{W}u^+$$

La función $\mathbf{x}(s) = R(\cos(2\pi s), \sin(2\pi s))$ es una parametrización 1-periódica de la circunferencia Γ . Entonces, de la relación anterior, teniendo en cuenta las condiciones de transmisión (2.4) y el Lema 1.12, se deduce que

$$\int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} v^- d\sigma = -2 \int_{\Gamma} \mathcal{W}u^- v^- d\sigma = -2d(u, v) \quad (2.48)$$

donde $d(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal definida en (2.9). Combinando la relación (2.48) con (2.6), obtenemos la siguiente formulación variacional del problema (2.1):

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u \in V \text{ tal que} \\ &a(u, v) + 2d(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{2.49}$$

donde la forma $a(\cdot, \cdot)$ está dada por (2.5) y $l(v) := (f, v)_{0, \Omega^-}$.

Teorema 2.15. *El problema (2.49) tiene una única solución.*

Prueba. Las propiedades de las formas bilineales $a(\cdot, \cdot)$ y $d(\cdot, \cdot)$ (véase el Lema 1.10) implican que la forma bilineal del problema (2.49) es continua y elíptica en V . Así, el resultado es una consecuencia del Lema de Lax-Milgram. ■

2.6.2. El problema discreto

El problema discreto asociado al problema (2.49) consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ &a(u_h, v_h) + 2d(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{2.50}$$

Como V_h es un subespacio de dimensión finita de V , el problema (2.50) está bien planteado. Por otra parte, usando el Lema de Céa, se tiene que

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega^-} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega^-}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h . Esta desigualdad y la propiedad de aproximación (2.19) permiten deducir el resultado siguiente.

Teorema 2.16. *La sucesión $(u_h)_{h>0}$ converge a u en $H^1(\Omega^-)$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Si además $u \in H^2(\Omega^-)$, entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega^-} \leq Ch \|u\|_{2, \Omega^-}$$

2.6.3. El efecto de la integración numérica

Para calcular los elementos del sistema asociado al problema discreto (2.50), es necesario el uso de fórmulas de cuadratura. Resolvemos el problema modificado

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h^* \in V_h \text{ tal que} \\ &a_h(u_h^*, v_h) + 2d_h(u_h^*, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{2.51}$$

donde las formas bilineales $a_h(\cdot, \cdot)$ y $d_h(\cdot, \cdot)$ están dadas por (2.26) y (2.33), respectivamente, y $l_h(v_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(fv_h)$.

En virtud del Lema de Strang, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\begin{aligned} \|u - u_h^*\|_{1, \Omega^-} &\leq C \sup_{w_h \in V_h} \frac{|l(w_h) - l_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1, \Omega^-}} + \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1, \Omega^-} \\ &\quad + C \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{1, \Omega^-}} + \frac{|d(v_h, w_h) - d_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{1, \Omega^-}} \right\} \end{aligned}$$

El resultado siguiente es una consecuencia de los Teoremas 2.8 y 2.16, y de las desigualdades (2.37) y (2.36).

Teorema 2.17. *El problema (2.51) está bien planteado para h suficientemente pequeño y la sucesión $(u_h^*)_h$ converge a u en $H^1(\Omega^-)$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Si además $u \in H^2(\Omega^-)$ y $f \in W^{1, \infty}(\Omega^-)$, entonces existe una constante $C > 0$ y $h_0 > 0$ tal que*

$$\|u - u_h^*\|_{1, \Omega^-} \leq Ch(\|u\|_{2, \Omega^-} + \|f\|_{1, \infty, \Omega^-}) \quad \forall h \leq h_0$$

2.6.4. Experiencias numéricas

La simplificación que ofrece este método se manifiesta especialmente en el trabajo de programación que requiere y en la reducción del tiempo de cálculo en comparación con el método descrito en la sección 2.4. Sean $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_M \in \sigma_h$ los vértices de la triangulación τ_h^- que no están en Γ_0 . Para $i = 1, \dots, M$, denotamos por ϕ_i la función de V_h tal que

$$\phi_i(\mathbf{a}_j) = \delta_{i,j} \quad (j = 1, \dots, M)$$

El conjunto $\{\phi_i\}_{i=1}^M$ es una base del espacio V_h . Así, el problema (2.51) es equivalente al sistema lineal

$$(\mathbf{A} + \mathbf{D}) \mathbf{u} = \mathbf{b} \tag{2.52}$$

donde para $i, j = 1, \dots, M$,

$$a_{ij} := a_h(\phi_j, \phi_i), \quad d_{ij} := 2d_h(\phi_j, \phi_i) \quad \text{y} \quad b_i := l_h(\phi_i)$$

La solución del problema (2.51) está dada por la relación $u_h^* = \sum_{i=1}^M u_i \phi_i$.

Como la matriz del sistema (2.52) es simétrica y definida positiva, el vector \mathbf{u} se puede obtener mediante un método de gradiente conjugado preconditionado. Para preconditionar el sistema, se puede utilizar cualquier preconditionador de la matriz \mathbf{A} , que es espectralmente equivalente a la matriz $\mathbf{A} + \mathbf{D}$ (véase el Lema 2.12).

En las experiencias numéricas que hemos realizado, se ha usado la matriz \mathbf{A} como preconditionador. Para facilitar la programación del algoritmo, conviene efectuar la factorización de Cholesky de la matriz.

Resolvemos el problema (2.47) utilizando como frontera de acoplamiento la circunferencia de centro el origen y de radio 3. El criterio de parada se impone sobre la norma del residuo. Los resultados obtenidos pueden verse en la Tabla 2.2. Aprovechamos las similitudes entre el método de gradiente conjugado y el método de Lanczos para hallar autovalores para estimar el número de condición κ de la matriz $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} + \mathbf{D})$. Utilizamos un código de S.F. Ashby et al. [2]. Nótese que κ es independiente del paso de discretización h , y, como consecuencia, también lo es el número de iteraciones.

h	Iteraciones	$ u - u_h _{1,\Omega^-}$	κ
1/16	6	$1,0224 \cdot 10^{-1}$	1,8034
1/32	11	$4,4195 \cdot 10^{-2}$	1,8905
1/64	11	$3,3278 \cdot 10^{-2}$	1,9545
1/128	10	$1,7463 \cdot 10^{-2}$	1,9809
1/256	10	$9,5401 \cdot 10^{-3}$	1,9934

Cuadro 2.2: Convergencia en función del parámetro h

Capítulo 3

Un problema no lineal monótono

En este capítulo empleamos las técnicas descritas en el capítulo 2 para resolver un problema exterior no lineal. Concretamente, consideramos un problema elíptico no lineal, fuertemente monótono y Lipschitz-continuo en una zona acotada del dominio, que se reduce a la ecuación de Laplace en la región exterior no acotada; ambas ecuaciones están acopladas mediante condiciones de transmisión adecuadas sobre la interfaz. Este tipo de problemas ha sido estudiado por M. Costabel y E.P. Stephan [24] y G.N. Gatica y G.C. Hsiao [33, 36]; sus trabajos pueden considerarse una extensión al caso no lineal del método simétrico (cf. [20], [48]). En H. Berger et al. [3] se propone un método basado en el de C. Johnson y J.C. Nédélec [54].

En la sección 3.1 describimos el problema modelo y generalizamos las técnicas del capítulo 2 para obtener una nueva formulación BEM–FEM. El análisis del problema continuo es similar al realizado por G.N. Gatica y G.C. Hsiao [33, 36]. En efecto, la existencia y unicidad de solución, que se estudia en la sección 3.2, es una consecuencia de la teoría de operadores monótonos. En la sección 3.3 empleamos una triangulación exacta del dominio acotado para discretizar el problema. Debido al uso de triángulos curvos en la discretización, es necesario probar un resultado técnico sobre aproximación en espacios de Sobolev de índice no entero. Bajo condiciones adecuadas sobre los coeficientes de la ecuación no lineal, obtenemos una estimación tipo Céa y probamos estimaciones óptimas del error. El efecto del uso de fórmulas de cuadratura sobre la convergencia, que no se analiza en ningún trabajo anterior, se estudia en la sección 3.4. En la sección 3.5 se dan algunos ejemplos a los que se pueden aplicar los resultados vistos en los apartados anteriores. Finalmente, en la sección 3.6 se analiza el caso particular en que se elige como frontera de acoplamiento una circunferencia,

y se presenta una aplicación en Magnetostática.

3.1. El problema modelo

Sea Ω_0 un dominio acotado en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ_0 es de Lipschitz. Consideramos una curva cerrada simple Γ_1 que contiene el dominio $\overline{\Omega_0}$ en su interior. Denotamos por Ω_{NL} la región limitada por las curvas Γ_0 y Γ_1 , y llamamos Ω_L al complementario de $\overline{\Omega_0} \cup \overline{\Omega_{NL}}$ en \mathbb{R}^2 (véase la figura 3.1). Dada una función v definida en Ω_{NL} (Ω_L),

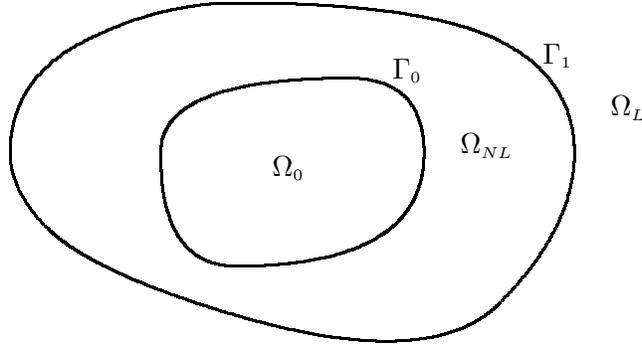


Figura 3.1: Dominio del problema modelo

denotamos su traza sobre Γ_1 por v_{NL} (v_L , resp.).

Sea $f \in L^2(\Omega_{NL})$ una función conocida y sea

$$\begin{aligned} \mathbf{b} &: \overline{\Omega_{NL}} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) &\mapsto \mathbf{b}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \\ b_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

una función continua y no lineal. Buscamos una función $u: \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}$, solución del problema

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{b}(\cdot, u, \nabla u) &= f && \text{en } \Omega_{NL} \\ -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_L \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\ u &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \\ u_{NL} &= u_L \\ \mathbf{b}(\cdot, u_{NL}, \nabla u_{NL}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial u_L}{\partial \mathbf{n}_1} \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde \mathbf{n}_1 es el vector unitario normal a Γ_1 , orientado de Ω_{NL} a Ω_L .

En el capítulo 2, vimos que la regularidad de la frontera de acoplamiento es esencial en nuestro método. Si la curva Γ_1 es suficientemente regular, puede actuar como frontera de acoplamiento y no es necesario considerar una frontera auxiliar. Sin embargo, en la práctica Γ_1 viene dada por el problema y, en general, no es regular.

Sea Γ una curva cerrada simple de clase \mathcal{C}^∞ que contiene en su interior la región $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_{NL}$. La curva Γ divide el dominio Ω_L en dos regiones: una región acotada, que denotamos Ω^- , y la región no acotada exterior a Γ , que denotamos Ω^+ . Entonces, el problema (3.1) es equivalente a un problema de transmisión que consiste en un problema planteado en el dominio acotado $\Omega := \Omega_{NL} \cup \Gamma_1 \cup \Omega^-$:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{b}(\cdot, u, \nabla u) &= f && \text{en } \Omega_{NL} \\ -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega^- \\ u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\ u_{NL} &= u_L \\ \mathbf{b}(\cdot, u_{NL}, \nabla u_{NL}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial u_L}{\partial \mathbf{n}_1} \end{aligned} \quad (3.2)$$

acoplado con un problema *lineal y homogéneo* planteado en Ω^+ :

$$\begin{aligned} -\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega^+ \\ u &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (3.3)$$

mediante las condiciones de transmisión sobre Γ :

$$u^- = u^+ \quad \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} = \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}} \quad (3.4)$$

En la relación (3.4), designamos por \mathbf{n} el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω^- a Ω^+ .

A lo largo de este capítulo exigimos que la función \mathbf{b} verifique ciertas condiciones que iremos introduciendo a medida que se necesiten.

Hipótesis 3.1. *Existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\mathbf{b}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})| \leq C(1 + |\boldsymbol{\alpha}|) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL} \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$$

Consideramos la forma $a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(u, v) := a_{NL}(u, v) + a_L(u, v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega) \quad (3.5)$$

donde

$$a_{NL}(u, v) := \int_{\Omega_{NL}} \mathbf{b}(\cdot, u, \nabla u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

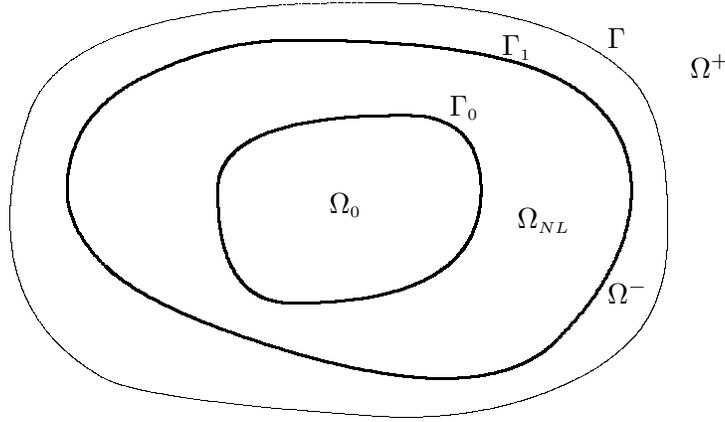


Figura 3.2: Dominio del problema de transmisión

y

$$a_L(u, v) := \int_{\Omega^-} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

La forma $a(\cdot, \cdot)$ está bien definida en virtud de la Hipótesis 3.1 (véase el Teorema 32.3 de A. Ženíšek [100]; cf. también G.N. Gatica y G.C. Hsiao [36]).

Multiplicando las dos primeras ecuaciones de (3.2) por una función test v tal que $v|_{\Gamma_0} = 0$ y usando una fórmula de Green, deducimos la formulación variacional del problema en el dominio acotado Ω :

$$a(u, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} v^- \, d\sigma = \int_{\Omega_{NL}} f v \, d\mathbf{x} \quad \forall v \in V \quad (3.6)$$

donde

$$V := \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Por otra parte, la solución del problema (3.3) se puede calcular mediante la fórmula de representación dada en la Proposición 1.9, una vez determinados los datos de Cauchy de u sobre Γ . De esta expresión se deducen las ecuaciones integrales periódicas (2.7) y (2.8). Usando las condiciones de transmisión (3.4) y las relaciones (3.6), (2.8) y (2.7), obtenemos la siguiente formulación variacional del problema (3.1):

hallar $u \in V$ y $\xi \in H_0^{-1/2}$ tales que

$$\begin{aligned} a(u, v) + d(u, v) - c(v, \xi) &= (f, v)_{0, \Omega_{NL}} & \forall v \in V \\ c(u, \eta) + b(\xi, \eta) &= 0 & \forall \eta \in H_0^{-1/2} \end{aligned} \quad (3.7)$$

donde las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$ y $d(\cdot, \cdot)$ están dadas por (2.9) y la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$, por (2.10).

3.2. Existencia y unicidad

En este apartado probamos que, bajo ciertas condiciones, el problema (3.7) tiene una única solución. Para ello, suponemos que la función \mathbf{b} posee la siguiente propiedad.

Hipótesis 3.2. *Las derivadas $\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_j}$ ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$) son funciones continuas en $\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^3$. Además, existe una constante $\delta > 0$ tal que para cualesquiera $\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL}$ y $\boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$,*

$$\sum_{i=1}^2 \sum_{j=0}^2 \frac{\partial b_i}{\partial \alpha_j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \beta_i \beta_j \geq \delta(\beta_1^2 + \beta_2^2) \quad \forall \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^3, \boldsymbol{\beta} = (\beta_0, \beta_1, \beta_2)$$

El siguiente resultado se prueba en A. Ženíšek [100, Teorema 32.6].

Lema 3.1. *Bajo la Hipótesis 3.1, la forma $a(\cdot, \cdot)$ es acotada en $H^1(\Omega)$, esto es, existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|a(u, v)| \leq C(1 + \|u\|_{1,\Omega}) \|v\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

Si además se verifica la Hipótesis 3.2, entonces $a(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona en V , es decir, existe una constante $\delta > 0$ tal que

$$a(u, u - v) - a(v, u - v) \geq \delta \|u - v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u, v \in V$$

Sea $M := V \times H_0^{-1/2}$. Consideramos la forma $A: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A(\hat{u}, \hat{v}) := a(u, v) + B(\hat{u}, \hat{v}) \quad \forall \hat{u}, \hat{v} \in M$$

donde las formas $a(\cdot, \cdot)$ y $B(\cdot, \cdot)$ están dadas por (3.5) y (2.12), respectivamente. Sea $L: M \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal definida por $L(\hat{v}) := (f, v)_{0,\Omega_{NL}} \quad \forall \hat{v} \in M$. Entonces, el problema (3.7) es equivalente al problema siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u} \in M \text{ tal que} \\ &A(\hat{u}, \hat{v}) = L(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in M \end{aligned} \tag{3.8}$$

Teorema 3.2. *Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, el problema (3.7) posee una única solución.*

Prueba. En virtud de la Proposición 2.1 y el Lema 3.1, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona y acotada en M . En estas condiciones, como consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach, el problema (3.8) admite una única solución (para más detalles, cf. J. Nečas [76], G.N. Gatica y G.C. Hsiao [36]). ■

3.3. El problema discreto

En lo que sigue, por simplicidad, suponemos que las fronteras Γ_0 y Γ_1 son poligonales. Dado un número natural N , denotamos por $h := 1/N$ y consideramos una familia de triangulaciones exactas $(\tau_h)_h$ del dominio $\bar{\Omega}$. Suponemos que la familia $(\tau_h)_h$ es *cuasi-uniforme*, es decir, es regular y además existe una constante $c > 0$, independiente de h , tal que $h_T \geq ch \forall T \in \tau_h$. Además, la triangulación τ_h determina una triangulación del dominio $\bar{\Omega}^-$, que denotamos τ_h^- , y una triangulación del dominio $\bar{\Omega}_{NL}$, que denotamos $\tau_{h,NL}$; diremos que τ_h es *compatible* con la interfaz Γ_1 . Asociamos a la triangulación τ_h el espacio de elementos finitos

$$V_h := \{v_h \in \mathcal{C}(\bar{\Omega}) ; v_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau_h, \quad v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Nótese que V_h es un subespacio de dimensión finita de V . Entonces, el problema discreto asociado al problema (3.8) consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h \in M_h := V_h \times H_h \text{ tal que} \\ &A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = L(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \tag{3.9}$$

Como M_h es un subespacio de dimensión finita de M , bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, el problema (3.9) tiene una única solución. Para estudiar la estabilidad y la convergencia del método, y llevar a cabo el análisis del error, supondremos que la función \mathbf{b} satisface las siguientes condiciones.

Hipótesis 3.3. *Las derivadas $\frac{\partial b_i}{\partial \alpha_j}$ ($i = 1, 2; j = 0, 1, 2$) son funciones continuas en $\bar{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^3$ y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \frac{\partial b_i}{\partial \alpha_j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq C \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{NL} \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$$

Lema 3.3. *Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.3, la forma $a(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua en $H^1(\Omega)$, es decir, existe una constante $k > 0$ tal que*

$$|a(u, w) - a(v, w)| \leq k \|u - v\|_{1,\Omega} \|w\|_{1,\Omega} \quad \forall u, v, w \in H^1(\Omega)$$

Prueba. Véase el Teorema 36.2 de A. Ženíšek [100]. ■

Lema 3.4. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis 3.1, 3.2 y 3.3. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq C \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_M$$

Prueba. En las condiciones del Lema, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona en M (véase la prueba del Teorema 3.2). Luego, teniendo en cuenta que \hat{u} y \hat{u}_h son las soluciones de los problemas (3.8) y (3.9), respectivamente, se tiene que

$$\delta \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M^2 \leq A(\hat{u}, \hat{u} - \hat{v}_h) - A(\hat{u}_h, \hat{u} - \hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h$$

Por otra parte, usando la Proposición 2.1 y el Lema 3.3, se prueba fácilmente que $A(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua. Así, deducimos que

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq C \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{v}_h \in M_h$$

de donde se sigue el resultado. ■

Como la curva Γ_0 es poligonal, alguno de los ángulos exteriores formados por las intersecciones de lados consecutivos de Γ_0 es obtuso. Esto origina singularidades en la solución incluso cuando la condición de contorno es de tipo Dirichlet homogénea (véase P. Grisvard [45]), de forma que ésta no tiene la regularidad $H^2(\Omega)$. En nuestro caso, además, la derivada normal de u tiene en general un salto sobre la frontera Γ_1 . Por tanto, la primera componente de la solución del problema (3.7) pertenece a lo sumo al espacio $H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0, 1)$, y no podemos utilizar la estimación del error de interpolación global que se deduce de (2.17). En el Teorema 3.3 de J. Xu [97] se da una propiedad de aproximación en espacios de Sobolev de índice no entero para triángulos rectos. A continuación, generalizamos este resultado para triángulos curvos.

Lema 3.5. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\inf_{v_h \in V_h} \|v - v_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^\sigma \|v\|_{1+\sigma,\Omega} \quad \forall v \in V \cap H^{1+\sigma}(\Omega)$$

Prueba. Sea T un triángulo de τ_h . Dada una función $v \in \mathcal{C}(T)$, denotamos por $\hat{v} := v \circ \mathbf{f}_T$. Sea $\hat{I} \equiv I_{\hat{T}}: \mathcal{C}(\hat{T}) \rightarrow \mathcal{P}_1(\hat{T})$ el operador de interpolación de Lagrange sobre el triángulo de referencia. Entonces, se verifica que $(I_T v) \circ \mathbf{f}_T = \hat{I} \hat{v}$. Efectuando un cambio de variables y aplicando el Lema 2.3, se tiene que

$$|v - I_T v|_{1,T} \leq C |\hat{v} - \hat{I} \hat{v}|_{1,\hat{T}}$$

Ahora bien, como los polinomios de grado inferior o igual a 1 son invariantes por \widehat{I} , usando el Lema de Bramble-Hilbert generalizado (cf. J. Xu [97, Teorema 2.3.1]), deducimos que

$$|\hat{v} - \widehat{I}\hat{v}|_{1,\hat{T}} \leq C|\widehat{\nabla}\hat{v}|_{\sigma,\hat{T}}$$

donde el operador $\widehat{\nabla}$ denota el gradiente con respecto a la variable $\hat{\mathbf{x}}$.

Sea $\mathbf{B} := \left(\frac{\partial}{\partial \hat{x}_i} \mathbf{f}_{T,j}\right)_{i,j}$. Aplicando la regla de la cadena, se comprueba fácilmente que

$$\widehat{\mathbf{B}}^{-1}\widehat{\nabla}(\hat{v}) = \nabla v \circ \mathbf{f}_T$$

Entonces, haciendo un cambio de variable, tenemos

$$\begin{aligned} |\widehat{\nabla}\hat{v}|_{\sigma,\hat{T}}^2 &= \int_{\hat{T}} \int_{\hat{T}} \frac{|\widehat{\nabla}\hat{v}(\hat{\mathbf{x}}) - \widehat{\nabla}\hat{v}(\hat{\mathbf{y}})|^2}{|\hat{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{y}}|^{2+2\sigma}} d\hat{\mathbf{x}} d\hat{\mathbf{y}} \\ &= \int_T \int_T \frac{|\mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}))\nabla v(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y}))\nabla v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2+2\sigma}} J_T^{-1}(\mathbf{x})J_T^{-1}(\mathbf{y}) d\mathbf{x} d\mathbf{y} \end{aligned}$$

donde J_T^{-1} es el jacobiano de la transformación inversa \mathbf{f}_T^{-1} .

Si T es un triángulo recto, entonces la matriz \mathbf{B} es constante y se tiene que

$$|\widehat{\nabla}\hat{v}|_{\sigma,\hat{T}} \leq Ch^\sigma |\nabla v|_{\sigma,T}$$

Queda probar que esta desigualdad se satisface también cuando T es un triángulo curvo. En virtud de (2.15), deducimos que

$$|\widehat{\nabla}\hat{v}|_{\sigma,\hat{T}}^2 \leq Ch^{-4} \int_T \int_T \frac{|\mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}))\nabla v(\mathbf{x}) - \mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y}))\nabla v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

Usando la desigualdad triangular, podemos escribir

$$|\widehat{\nabla}\hat{v}|_{\sigma,\hat{T}}^2 \leq Ch^{-4}(I_1 + I_2)$$

donde

$$I_1 := \int_T \int_T |\mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}))|^2 \frac{|\nabla v(\mathbf{x}) - \nabla v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

e

$$I_2 := \int_T \int_T |\nabla v(\mathbf{y})|^2 \frac{|\mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x})) - \mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y}))|^2}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

Aplicando (2.16) y el Teorema del Valor Medio, acotamos I_1 como sigue:

$$\begin{aligned} I_1 &\leq Ch^2 \int_T \int_T \frac{|\nabla v(\mathbf{x}) - \nabla v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2\sigma}} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2+2\sigma}}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2+2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y} \\ &\leq Ch^{4+2\sigma} |\nabla v|_{\sigma,T}^2 \end{aligned}$$

Por otro lado,

$$I_2 = \int_T \int_T \frac{|\mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x})) - \mathbf{B}(\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y}))|^2}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^2} \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\sigma}}{|\mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}_T^{-1}(\mathbf{y})|^{2\sigma}} \frac{|\nabla v(\mathbf{y})|^2}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\sigma}} d\mathbf{x} d\mathbf{y}$$

Usando los mismos argumentos que para I_1 , se tiene que

$$I_2 \leq Ch^{4+2\sigma} \int_T \left(\int_T \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\sigma}} \right) |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y}$$

Como la familia de triangulaciones $(\tau_h)_h$ es cuasi-uniforme, existe una constante c tal que $T \subset B(\mathbf{y}; ch) \forall \mathbf{y} \in T \forall T \in \tau_h$. Por tanto,

$$I_2 \leq Ch^{4+2\sigma} \int_T \left(\int_{B(\mathbf{y}; ch)} \frac{d\mathbf{x}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^{2\sigma}} \right) |\nabla v(\mathbf{y})|^2 d\mathbf{y} \leq Ch^6 |v|_{1,T}^2$$

donde la última desigualdad se sigue evaluando la integral de forma exacta.

De las estimaciones obtenidas para I_1 e I_2 , deducimos que

$$|\widehat{\nabla} \hat{v}|_{\sigma, \hat{T}}^2 \leq C (h^{2\sigma} |\nabla v|_{\sigma, T}^2 + h^2 |v|_{1, T}^2)$$

de donde se sigue el resultado. ■

Teorema 3.6. *Supongamos que $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$ y que se verifican las Hipótesis 3.1, 3.2 y 3.3. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega} + \|\xi - \xi_h\|_{-1/2} \leq Ch^\sigma \|u\|_{1+\sigma, \Omega}$$

Prueba. Basta aplicar los Lemas 3.4, 3.5 y 2.5, y un Teorema de traza. ■

3.4. El efecto de la integración numérica

En la práctica, se resuelve un sistema obtenido al aproximar los coeficientes del sistema (3.9) mediante fórmulas de cuadratura. El uso de estas fórmulas es inevitable debido, entre otras razones, a la no linealidad de la forma $a(\cdot, \cdot)$, la singularidad del núcleo del operador de simple capa y el uso de triángulos curvos en la discretización. En este apartado, proponemos un esquema completamente discreto para resolver el problema (3.1) y analizamos el error de convergencia. Para ello, será necesario suponer que la función \mathbf{b} satisface alguna propiedad adicional.

Utilizamos la fórmula de cuadratura (2.24) para definir la forma

$$a_h(u_h, v_h) := a_{h,L}(u_h, v_h) + a_{h,NL}(u_h, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in V_h \quad (3.10)$$

donde

$$a_{h,L}(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(\nabla u_h \cdot \nabla v_h)$$

y

$$a_{h,NL}(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_{h,NL}} Q_T(\mathbf{b}(\cdot, u_h, \nabla u_h|_T) \cdot \nabla v_h|_T)$$

Definimos la forma lineal $L_h: M_h \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$L_h(\hat{v}_h) := \sum_{T \in \tau_{h,NL}} Q_T(fv_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \quad (3.11)$$

Lema 3.7. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces existe $h_0 \in (0, 1]$ tal que para $h \leq h_0$, las formas $a_h: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ son uniformemente fuertemente monótonas en V_h , es decir, existe una constante $\tilde{\delta} > 0$, independiente de h , tal que*

$$a_h(u_h, u_h - v_h) - a_h(v_h, u_h - v_h) \geq \tilde{\delta} \|u_h - v_h\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

y uniformemente acotadas en V_h , esto es, existe una constante $\tilde{C} > 0$, independiente de h , tal que

$$|a_h(u_h, v_h)| \leq \tilde{C} (1 + \|u_h\|_{1,\Omega}) \|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

Prueba. Este resultado se prueba en el Teorema 35.2 de A. Ženíšek [100]. ■

Dados $\hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$, aproximamos $A(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$ por

$$A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) := a_h(u_h, v_h) + B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

donde $B_h(\cdot, \cdot)$ es la aproximación de la forma bilineal $B(\cdot, \cdot)$ dada en (2.35). Proponemos el siguiente esquema completamente discreto para resolver el problema (3.9):

$$\begin{aligned} & \text{hallar } \hat{u}_h^* \in M_h \text{ tal que} \\ & A_h(\hat{u}_h^*, \hat{v}_h) = L_h(\hat{v}_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \quad (3.12)$$

Teorema 3.8. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces el problema (3.12) tiene una única solución cuando h es suficientemente pequeño.*

Prueba. Usando la Proposición 2.9 y el Lema 3.7, deducimos que la forma $A_h(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona y acotada en M_h , cuando h es suficientemente pequeño. En estas condiciones, el problema (3.12) tiene una única solución en virtud del Teorema del Punto Fijo de Banach. ■

Lema 3.9. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1, 3.2 y 3.3. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\begin{aligned} \|\hat{u} - \hat{u}_h^*\|_M &\leq C \sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{|L(\hat{w}_h) - L_h(\hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|_M} \\ &+ C \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \left\{ \|\hat{u} - \hat{v}_h\|_M + \sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{|A(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A_h(\hat{v}_h, \hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|_M} \right\} \end{aligned}$$

Prueba. En el Teorema 3.8 hemos visto que bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, la forma $A_h(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona para h suficientemente pequeño. Por tanto, para cualquier $\hat{v}_h \in M_h$, se tiene que

$$\begin{aligned} \tilde{\delta} \|\hat{v}_h - \hat{u}_h^*\|_M^2 &\leq |A_h(\hat{v}_h, \hat{v}_h - \hat{u}_h^*) - A(\hat{v}_h, \hat{v}_h - \hat{u}_h^*)| \\ &+ |A(\hat{v}_h, \hat{v}_h - \hat{u}_h^*) - A(\hat{u}, \hat{v}_h - \hat{u}_h^*)| + |L(\hat{v}_h - \hat{u}_h^*) - L_h(\hat{v}_h - \hat{u}_h^*)| \end{aligned}$$

Por otra parte, en virtud de las Hipótesis 3.1 y 3.3, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua en M (véase la prueba del Lema 3.4). Aplicando esta propiedad y dividiendo ambos miembros de la desigualdad por $\|\hat{v}_h - \hat{u}_h^*\|_M$ (para $\hat{v}_h \neq \hat{u}_h^*$), se deduce el resultado. ■

Deseamos estimar el segundo miembro de la desigualdad del Lema 3.9. Para ello, debemos suponer que la función \mathbf{b} satisface la siguiente propiedad.

Hipótesis 3.4. *Las funciones $\frac{\partial b_i}{\partial x_j} : \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j = 1, 2$) son continuas y existe una constante $C > 0$ tal que*

$$\left| \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq C(1 + |\boldsymbol{\alpha}|) \quad \forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^3$$

El siguiente resultado es esencial para el análisis del efecto de la integración numérica en problemas no lineales. Sin embargo, no fue probado hasta el año 1.987. La idea de la prueba se debe a M. Feistauer [28].

Lema 3.10. *Bajo las Hipótesis 3.1, 3.3 y 3.4, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|a(u_h, v_h) - a_h(u_h, v_h)| \leq Ch(1 + \|u_h\|_{1,\Omega}) \|v_h\|_{1,\Omega} \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

Proposición 3.11. *Bajo las Hipótesis 3.1, 3.3 y 3.4, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) - A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h)| \leq Ch(1 + \|\hat{u}_h\|_M) \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

Prueba. Basta aplicar el Lema 3.10 y la Proposición 2.9. ■

La Proposición anterior permite estimar el tercer sumando del segundo miembro de la desigualdad del Lema 3.9. Por otra parte, si $f \in W^{1,\infty}(\Omega_{NL})$, aplicando el Lema 2.7 en cada triángulo de $\tau_{h,NL}$ y usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, se tiene que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$|L(\hat{w}_h) - L_h(\hat{w}_h)| \leq Ch \|f\|_{1,\infty,\Omega_{NL}} \|\hat{w}_h\|_M \quad \forall \hat{w}_h \in M_h \quad (3.13)$$

Teorema 3.12. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1–3.4. Entonces, si $f \in W^{1,\infty}(\Omega_{NL})$ y $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0,1)$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que,*

$$\|u - u_h^*\|_{1,\Omega} + \|\xi - \xi_h^*\|_{-1/2} \leq Ch^\sigma (1 + \|u\|_{1+\sigma,\Omega} + \|f\|_{1,\infty,\Omega_{NL}})$$

Prueba. El resultado es una consecuencia del Lema 3.9, la desigualdad (3.13), el Teorema 3.6 y la Proposición 3.11. ■

3.5. Algunos ejemplos

En esta sección damos algunos ejemplos de funciones b_i ($i = 1, 2$) que verifican las Hipótesis 3.1–3.4.

Sea $k: \bar{\Omega}_{NL} \times [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ una función de clase C^1 con las propiedades:

a) Existen constantes $0 < \alpha \leq \beta$ tales que

$$\alpha \leq \frac{\partial}{\partial s}(sk(\mathbf{x}, s)) \leq \beta \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \bar{\Omega}_{NL} \times [0, +\infty)$$

b) Las derivadas $\frac{\partial k}{\partial x_j}$ ($j = 1, 2$) están acotadas, es decir, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial k}{\partial x_j}(\mathbf{x}, s) \right| \leq C \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \bar{\Omega}_{NL} \times [0, +\infty) \quad (j = 1, 2)$$

Una consecuencia importante de las propiedades anteriores es que

$$\alpha \leq k(\mathbf{x}, s) \leq \beta \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \bar{\Omega}_{NL} \times [0, +\infty)$$

Consideremos las funciones $b_i: \bar{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) definidas por

$$b_i(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) := k\left(\mathbf{x}, \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}\right) \alpha_i \quad \forall \mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{NL} \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^3$$

Este tipo de funciones aparecen, por ejemplo, en la teoría y en el cálculo de campos magnéticos (veremos un ejemplo en la próxima sección). Usando las propiedades de la función k , se prueba que las funciones b_i ($i = 1, 2$) así definidas satisfacen las Hipótesis 3.1–3.4.

Ejemplo.- Sean a , b y c tres números reales positivos. Supongamos que $a > b/c$. Entonces la función

$$k(\mathbf{x}, s) \equiv k(s) = \frac{as + b}{s + c}$$

verifica las propiedades a) y b). La función

$$k(\mathbf{x}, s) \equiv k(s) = c \arctan(s + 1)$$

con $c > 0$, también satisface a) y b).

3.6. El caso de una frontera auxiliar circular

En ciertas aplicaciones es posible escoger como frontera auxiliar una circunferencia. En este caso, se obtiene una formulación variacional más sencilla. G.N. Gatica y G.C. Hsiao [35] extendieron las técnicas de G.C. Hsiao y S. Zhang [53] a la clase de problemas no lineales considerados en [33, 34]. En [35] la discretización del problema se lleva a cabo aproximando la circunferencia mediante una curva poligonal. Esto implica ciertas dificultades en el análisis del efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Aquí, discretizamos el problema usando una triangulación exacta del dominio acotado. De este modo, el análisis del error se simplifica y se mejoran las estimaciones de [35]. Además, proponemos un esquema completamente discreto y probamos que se conserva el orden de convergencia. Por último, presentamos resultados de las experiencias numéricas realizadas para un problema test que corresponde a un modelo de un motor eléctrico.

3.6.1. La formulación variacional

Sea Γ una circunferencia de centro el origen y de radio R . Suponemos que el dominio $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_{NL}$ está contenido en la región acotada por Γ . Entonces, combinando la formulación variacional del problema en el dominio acotado (3.6) con la expresión (2.48) que da la derivada normal $\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}}$ sobre Γ en términos de u , deducimos la siguiente formulación variacional del problema (3.1):

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u \in V \text{ tal que} \\ &a(u, v) + 2d(u, v) = l(v) \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{3.14}$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ y $d(\cdot, \cdot)$ están dadas por (3.5) y (2.9), y $l(v) := (f, v)_{0, \Omega_{NL}}$.

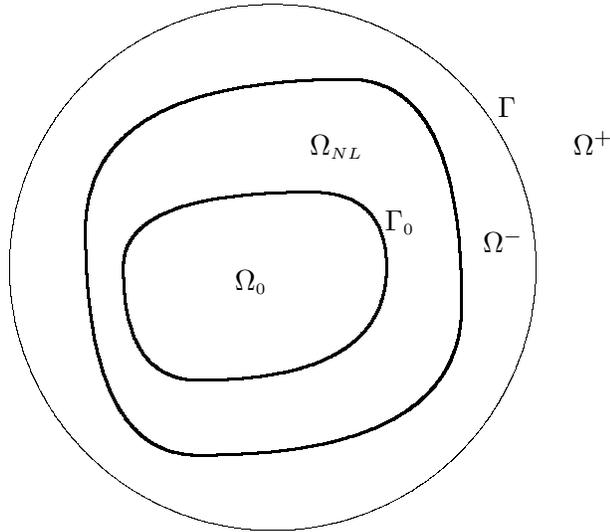


Figura 3.3: Dominio del problema de transmisión

Teorema 3.13. *Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, el problema (3.14) tiene una única solución.*

Prueba. En virtud de los Lemas 1.10 y 3.1, la forma $a(\cdot, \cdot) + 2d(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona y acotada en V . Así, el resultado es una consecuencia del Teorema del Punto Fijo de Banach. ■

3.6.2. El problema discreto

El problema discreto asociado al problema (3.14) consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ &a(u_h, v_h) + 2d(u_h, v_h) = l(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{3.15}$$

Teorema 3.14. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1–3.3. Entonces, la sucesión $(u_h)_{h>0}$ está bien definida y converge a u en $H^1(\Omega)$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Si*

además $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0, 1)$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^\sigma \|u\|_{1+\sigma,\Omega} \quad (3.16)$$

Prueba. Como V_h es un subespacio de dimensión finita de V , el problema (3.15) tiene una única solución. Por otra parte, en las condiciones del Teorema, la forma $a(\cdot, \cdot) + 2d(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona y Lipschitz-continua. Usando estas propiedades, tenemos que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega}$$

de donde se deduce que $u_h \rightarrow u$ en $H^1(\Omega)$. Por último, si $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, aplicando el Lema 3.5, se deduce la desigualdad (3.16). ■

3.6.3. El efecto de la integración numérica

Para resolver el sistema asociado al problema discreto (3.15), es necesario el uso de fórmulas de cuadratura, tanto por la no linealidad de la forma $a(\cdot, \cdot)$ como por la singularidad del núcleo de la forma bilineal $d(\cdot, \cdot)$. Resolvemos el problema modificado

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h^* \in V_h \text{ tal que} \\ &a_h(u_h^*, v_h) + 2d_h(u_h^*, v_h) = l_h(v_h) \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \quad (3.17)$$

donde la forma $a_h(\cdot, \cdot)$ está dada por (3.10), $d_h(\cdot, \cdot)$ se define en (2.33) y $l_h(v_h) := \sum_{T \in \tau_{h,NL}} Q_T(fv_h)$.

Teorema 3.15. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1–3.4. Entonces el problema (3.17) está bien planteado y la sucesión $(u_h^*)_{h>0}$ converge a u en $H^1(\Omega)$ cuando $h \rightarrow 0^+$. Si además $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0, 1)$, y $f \in W^{1,\infty}(\Omega_{NL})$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|u - u_h^*\|_{1,\Omega} \leq Ch^\sigma (1 + \|u\|_{1+\sigma,\Omega} + \|f\|_{1,\infty,\Omega_{NL}}) \quad \forall h \leq h_0$$

Prueba. Bajo las Hipótesis 3.1–3.3, procediendo como en el Lema 3.9, deducimos que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\begin{aligned} \|u - u_h^*\|_{1,\Omega} \leq & C \sup_{w_h \in V_h} \frac{|l(w_h) - l_h(w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} + C \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_{1,\Omega} \\ & + C \inf_{v_h \in V_h} \sup_{w_h \in V_h} \left\{ \frac{|a(v_h, w_h) - a_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} + \frac{|d(v_h, w_h) - d_h(v_h, w_h)|}{\|w_h\|_{1,\Omega}} \right\} \end{aligned}$$

El resultado es una consecuencia de las desigualdades (3.13) y (2.36), y de los Lemas 3.5 y 3.10. ■

3.6.4. Experiencias numéricas

El problema (3.17) conduce a un sistema no lineal que resolvemos aplicando el método de Newton, con la variante de Armijo para mejorar la convergencia. En cada iteración del algoritmo, debemos resolver un sistema lineal que tiene la misma estructura que el sistema (2.52). En concreto, en la iteración n hay que resolver el sistema

$$(\mathbf{A}_n + 2\mathbf{D})\boldsymbol{\delta}^n = \mathbf{b}_n \quad (3.18)$$

Si la matriz \mathbf{A}_n es simétrica y definida positiva, el sistema (3.18) puede resolverse usando el mismo algoritmo que hemos utilizado para hallar una solución del sistema (2.52).

3.6.5. Una aplicación en Magnetostática

En este apartado, formulamos las ecuaciones de Maxwell y algunas de sus consecuencias. Concretamente, nos ocupamos del problema estacionario y deducimos la formulación en potencial vector. Finalmente, presentamos los resultados numéricos obtenidos al calcular el campo magnético estacionario en un motor eléctrico.

Las ecuaciones de Maxwell

Las interacciones de naturaleza electromagnética entre los cuerpos se representan mediante dos campos vectoriales: la *intensidad de campo eléctrico*, $\mathbf{e}(x, y, z, t)$, y la *inducción magnética*, $\mathbf{b}(x, y, z, t)$. La fuerza electromagnética sobre una partícula viene dada por la *ley de Lorentz*

$$\mathbf{f} = q(\mathbf{e} + \mathbf{v} \times \mathbf{b})$$

donde \mathbf{v} es la *velocidad* de la partícula y q es la *carga eléctrica*, que es una medida de la sensibilidad de la partícula al campo electromagnético.

El movimiento de las cargas se llama *corriente eléctrica*. Su *intensidad* se puede caracterizar mediante la *densidad de corriente*, $\mathbf{j}(x, y, z, t)$. La ley de conservación de la carga se expresa matemáticamente mediante la *ecuación de continuidad*

$$\nabla \cdot \mathbf{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

donde ρ es la *densidad de carga*.

En los medios que contienen cargas libres (como los metales), la aplicación de un campo eléctrico \mathbf{e} produce una fuerza \mathbf{f} sobre cada una de las cargas que hace que

éstas se desplacen en promedio en la dirección del campo. Esto genera una corriente eléctrica, que tiene asociada una densidad de corriente \mathbf{j} . La *ley de Ohm* establece que el campo eléctrico y la densidad de corriente satisfacen la relación

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{e} \quad (3.19)$$

donde σ es la *conductividad* del material. En las aplicaciones, σ se suele considerar constante a trozos: cero, si el material no es conductor, y una constante positiva si lo es.

Como las partículas que constituyen la materia tienen una carga eléctrica, su presencia modifica el campo electromagnético. Este efecto macroscópico de la materia se tiene en cuenta introduciendo dos campos adicionales: la *inducción eléctrica*, $\mathbf{d}(x, y, z, t)$, y la *intensidad de campo magnético*, $\mathbf{h}(x, y, z, t)$. En muchos medios y para valores bajos de los campos, la inducción eléctrica es proporcional al campo eléctrico:

$$\mathbf{d} = \epsilon \mathbf{e} \quad (3.20)$$

El factor de proporcionalidad ϵ se llama *permitividad* del material; en las aplicaciones, ϵ es una función constante a trozos. En estas condiciones, la intensidad de campo magnético y la inducción magnética también están relacionadas:

$$\mathbf{b} = \mu \mathbf{h} \quad (3.21)$$

En este caso, el factor de proporcionalidad μ es una función que depende del campo magnético: $\mu = \mu(|\mathbf{b}|)$; recibe el nombre de *permeabilidad* del material.

Las ecuaciones de J.C. Maxwell (1831–1879) explican cómo se origina el campo eléctrico y cuáles son sus propiedades:

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{d}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{d} = \rho \quad (3.22)$$

$$\nabla \times \mathbf{e} = -\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.23)$$

La resolución de estas ecuaciones cuando no se dispone de las relaciones constitutivas (3.19)–(3.21) es extremadamente difícil.

Magnetostática: formulación en potencial vector

En el caso estacionario, las ecuaciones de Maxwell se simplifican:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{h} &= \mathbf{j} & \nabla \cdot \mathbf{d} &= \rho \\ \nabla \times \mathbf{e} &= 0 & \nabla \cdot \mathbf{b} &= 0 \end{aligned}$$

Si se verifican las relaciones (3.20) y (3.21), se tienen dos sistemas desacoplados.

En ciertas situaciones, el problema

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad \nabla \cdot \mathbf{b} = 0 \quad (3.24)$$

se puede reducir a una ecuación del tipo considerado en este capítulo. En efecto, la propiedad $\nabla \cdot \mathbf{b} = 0$ implica que existe un campo vectorial \mathbf{a} llamado *potencial vector magnético* tal que

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a}$$

Cualquier otro campo de la forma $\mathbf{a}' = \mathbf{a} + \nabla \phi$ verifica también que $\nabla \times \mathbf{a}' = \mathbf{b}$. Para que \mathbf{a} quede determinado de forma única, exigimos además que $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ (esta condición se conoce como *gauge de Coulomb*). Entonces, la primera ecuación de (3.24) se escribe

$$\nabla \times (\nu(|\nabla \times \mathbf{a}|) \nabla \times \mathbf{a}) = \mathbf{j}$$

donde $\nu := \frac{1}{\mu}$.

Si la corriente es transversal al plano xy , es decir,

$$\mathbf{j}(x, y, z) = (0, 0, f(x, y))$$

la inducción magnética \mathbf{b} está contenida en el plano xy , y el potencial vector es de la forma $\mathbf{a}(x, y, z) = (0, 0, u(x, y))$. Nótese que entonces $|\nabla \times \mathbf{a}| = |\nabla u|$. Así, el problema se reduce a determinar $u = u(x, y)$ tal que

$$-\nabla \cdot (\nu(|\nabla u|) \nabla u) = f$$

Cálculo del campo magnético estacionario en un motor eléctrico

La geometría de las componentes de un motor eléctrico (estátor, rotor y bobinado) tiene importantes consecuencias en el comportamiento del motor. A continuación calculamos el campo magnético estacionario debido al bobinado del estátor en un motor eléctrico sencillo con dos polos. Suponiendo que el motor es largo en relación con sus dimensiones transversales, podemos despreciar los efectos de los extremos y suponer que no existe variación en la dirección z . Así, todas las derivadas con respecto a la variable z desaparecen de la formulación y es suficiente considerar un corte bidimensional del motor. Habitualmente se desprecia el campo fuera del motor y se resuelve el problema en el interior, imponiendo condiciones de contorno artificiales en la frontera.

El dominio está formado por cuatro regiones: el *estátor* y el *rotor*, separados por *aire*, y dos bobinas de *cobre* (véase la figura 3.4). Deseamos calcular el campo

magnético inducido por una densidad de corriente perpendicular al plano. Por tanto, emplearemos la formulación en potencial vector. La permeabilidad magnética μ vale 1 en el *aire* y en el *cobre*; en el *estátor* y en el *rotor*, es una función no lineal:

$$\mu(s) = 200 + \frac{5000}{1 + 0,05s^2}$$

La densidad de corriente j es una función nula en todo punto excepto en el cobre: en el ánodo vale -1 y en el cátodo, 1 . El problema consiste en hallar $u: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu(|\nabla u(\mathbf{x})|)} \nabla u(\mathbf{x}) \right) &= j(\mathbf{x}) \quad \text{en } \mathbb{R}^2 \\ u(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) \quad \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned}$$

La reluctividad magnética $\nu = \mu^{-1}$, satisface las propiedades a) y b) de la sección 3.5. La solución obtenida se muestra en la figura 3.5. Las curvas de nivel de u representan las líneas de la inducción magnética \mathbf{b} .

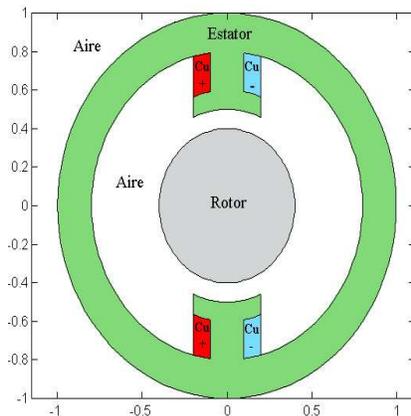


Figura 3.4: Sección de un motor

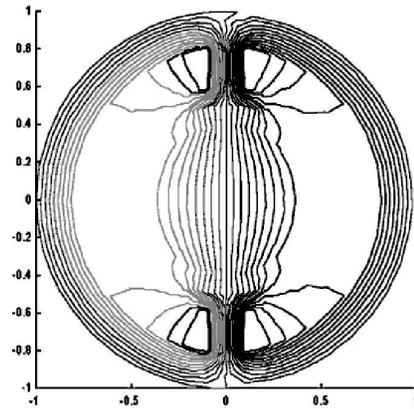


Figura 3.5: Curvas de nivel

Capítulo 4

Un problema parabólico-elíptico no lineal

En este capítulo analizamos un problema modelo que consiste en una ecuación parabólica no lineal en una zona acotada del dominio, y la ecuación de Laplace en la región exterior no acotada; ambas ecuaciones están acopladas mediante condiciones de transmisión sobre la interfaz. El interés por este tipo de problemas está justificado por el estudio de las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos cuasi-estacionarios.

En [65], R.C. MacCamy y M. Suri estudian un problema parabólico-elíptico que consiste en la ecuación del calor en una zona acotada del dominio, y la ecuación de Laplace en la región exterior no acotada. Utilizando el método de acoplamiento de C. Johnson y J.C. Nédélec [54], prueban la convergencia de las soluciones del esquema semidiscreto. Sin embargo, como la matriz de rigidez no es simétrica y tampoco definida positiva, el análisis de un esquema que tenga en cuenta la discretización de la variable temporal es difícil y aún está por resolver. En M. Costabel et al. [22] se utiliza el método simétrico para resolver el problema. En este caso, la matriz de rigidez es definida positiva. Empleando el método de Crank-Nicolson para la discretización en tiempo, se prueban resultados de convergencia y estimaciones del error teóricas.

En este trabajo, extendemos el método descrito en el capítulo 2 para analizar un problema parabólico-elíptico no lineal. Nos interesamos por el estudio del efecto de la integración numérica sobre la convergencia y obtenemos estimaciones del error para un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de cuadratura.

En la sección 4.1 presentamos las ecuaciones de Maxwell para campos electromagnéticos cuasi-estacionarios. Nuestra intención es motivar el estudio de los problemas parabólico-elípticos que consideramos en este capítulo. En la sección 4.2 describimos el problema modelo y empleamos las mismas técnicas que en los capítulos anteriores para reducirlo a un problema parabólico-elíptico planteado en una zona acotada. En la sección 4.3, seguimos A. Ženíšek [100] y utilizamos el método de Euler implícito para la discretización en tiempo y una triangulación exacta del dominio para la discretización espacial. Bajo hipótesis adecuadas sobre los coeficientes de la ecuación no lineal, probamos que el problema discreto tiene una única solución. Suponiendo que el operador de la ecuación parabólica es fuertemente monótono, en la sección 4.4 probamos la existencia y unicidad de la solución exacta, y un resultado de convergencia. En la sección 4.5 damos estimaciones del error. Finalmente, en la sección 4.6 proponemos un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de cuadratura, y en la sección 4.7 probamos que se conserva el orden de convergencia.

4.1. Motivación

Un campo electromagnético se dice *cuasi-estacionario* cuando es posible despreciar la variación con respecto a t de la inducción eléctrica \mathbf{d} (cf. A. Bossavit [8]). En este caso, la ecuación (3.22)₁ se reduce a

$$\nabla \times \mathbf{h} = \mathbf{j} \quad (4.1)$$

Por otro lado, de la ecuación (3.23)₂ deducimos que existe un campo vectorial $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, y, z, t)$, llamado *potencial vector magnético*, tal que

$$\mathbf{b} = \nabla \times \mathbf{a} \quad (4.2)$$

Si la corriente es transversal al plano xy , es decir,

$$\mathbf{j}(x, y, z, t) = (0, 0, f(x, y, t))$$

las relaciones (4.1) y (3.21) implican que la inducción magnética \mathbf{b} está contenida en el plano xy y el potencial vector magnético es de la forma

$$\mathbf{a}(x, y, z, t) = (0, 0, u(x, y, t))$$

Pero entonces,

$$\mathbf{b} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_2}, -\frac{\partial u}{\partial x_1}, 0 \right)^\top \quad \text{y} \quad |\mathbf{b}| = |\nabla u| \quad (4.3)$$

De las relaciones (3.23)₁ y (4.2) se deduce que existe un potencial escalar ϕ tal que

$$\mathbf{e} = -\nabla\phi - \frac{\partial\mathbf{a}}{\partial t}$$

Imponiendo la condición adicional $\nabla \cdot \mathbf{a} = 0$ (*gauge de Coulomb*), de las relaciones (3.20) y (3.22)₂ deducimos que

$$-\Delta\phi = \frac{\rho}{\epsilon}$$

Si la densidad de carga $\rho = 0$, se puede tomar $\phi = 0$ (cf. R.P. Feynman et al. [29]), de forma que el campo eléctrico está dado por

$$\mathbf{e} = \left(0, 0, -\frac{\partial u}{\partial t}\right)^\top \quad (4.4)$$

Combinando la relación (4.1) con la ley constitutiva (3.21) y la ley de Ohm (3.19), y teniendo en cuenta las expresiones que hemos obtenido para la inducción magnética \mathbf{b} y la intensidad de campo eléctrico \mathbf{e} (ver (4.3) y (4.4)), obtenemos

$$\sigma \frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot (\nu(|\nabla u|)\nabla u) = f \quad (4.5)$$

Denotemos por Ω_E la zona del dominio formada por materiales no conductores ($\sigma = 0$) y por Ω_P la parte constituida por materiales conductores ($\sigma > 0$). Si la reluctividad magnética ν satisface las condiciones *a*) y *b*) de la sección 3.5, la ecuación (4.5) es elíptica en Ω_E y parabólica en Ω_P . Para que el problema esté bien planteado, debemos añadir condiciones de contorno, condiciones iniciales en el dominio Ω_P y condiciones de transmisión sobre la interfaz $\Lambda := \partial\Omega_E \cap \partial\Omega_P$. Estas últimas son una consecuencia de las relaciones físicas

$$\mathbf{h}_E^\top \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{h}_P^\top \cdot \boldsymbol{\tau} \quad \text{y} \quad \mathbf{b}_E^\top \cdot \mathbf{n} = \mathbf{b}_P^\top \cdot \mathbf{n}$$

donde el subíndice E (P) indica la restricción a Λ de una función definida en Ω_E (Ω_P); $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{n} designan el vector tangente y el vector normal a Λ , respectivamente.

El modelo que hemos presentado se utiliza en ingeniería para el cálculo de campos electromagnéticos cuasi-estacionarios en máquinas eléctricas. Con esto pretendemos justificar el interés de los problemas que consideramos a continuación.

4.2. El problema modelo

Sea X un espacio de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|$ y sea $T > 0$ un número real. Denotamos por $L^2(0, T; X)$ el conjunto de todas las aplicaciones $u: (0, T) \rightarrow X$

tales que

$$\|u\|_{L^2(0,T;X)}^2 := \int_0^T \|u(t)\|^2 dt < \infty$$

El espacio $L^2(0, T; X)$ es de Banach dotado de la norma $\|\cdot\|_{L^2(0,T;X)}$. Si además X es de Hilbert dotado del producto escalar (\cdot, \cdot) , el espacio $L^2(0, T; X)$ también lo es con el producto escalar

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} := \int_0^T (u(t), v(t)) dt$$

El conjunto de todas las funciones continuas $u: [0, T] \rightarrow X$ se designa por $\mathcal{C}([0, T]; X)$ y es un espacio de Banach dotado de la norma

$$\|u\|_{\mathcal{C}([0,T];X)} := \sup_{t \in [0,T]} \|u(t)\|$$

En A. Kufner et al. [57] se estudian detalladamente estos espacios.

Sea Ω_0 un dominio acotado de \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ_0 es de Lipschitz. Consideramos una curva cerrada simple Γ_1 que contiene el dominio $\overline{\Omega}_0$ en su interior. Denotamos por Ω_P la región limitada por las curvas Γ_0 y Γ_1 , y por Ω_E el complementario de $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_P$ en \mathbb{R}^2 . Designamos por \mathbf{n}_1 el vector unitario normal a Γ_1 , orientado de Ω_P a Ω_E . Por último, dada una función $v: (0, T) \times \Omega_M \rightarrow \mathbb{R}$ ($M = E, P$), denotamos por v_M su límite sobre Γ_1 .

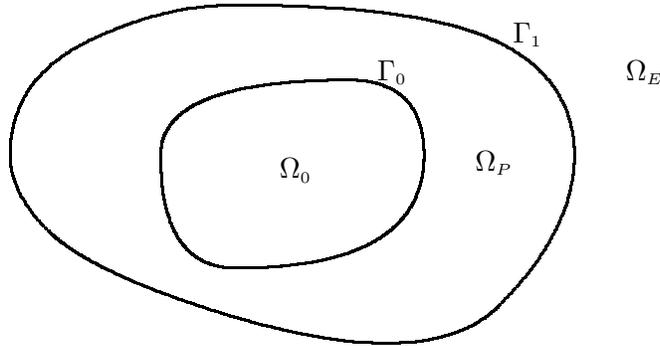


Figura 4.1: Dominio del problema modelo

Conocidas $f \in L^2(0, T; L^2(\Omega_P))$, $u_0 \in L^2(\Omega_P)$ y la función continua no lineal

$$\mathbf{b} : \overline{\Omega}_P \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \mapsto \mathbf{b}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) := \begin{pmatrix} b_1(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \\ b_2(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \end{pmatrix}$$

buscamos una función $u: (0, T) \times \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para cada $t \in (0, T)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{b}(\cdot, u, \nabla u) &= f(t) && \text{en } \Omega_P \\
-\Delta u(t) &= 0 && \text{en } \Omega_E \\
u(t) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\
u_P(t) &= u_E(t) && \\
\mathbf{b}(\cdot, u_P(t), \nabla u_P(t)) \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial u_E}{\partial \mathbf{n}_1}(t) && \\
u(0) &= u_0 && \text{en } \Omega_P \\
u(t) &= \mathcal{O}(1) && |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Sea Γ una curva cerrada simple de clase \mathcal{C}^∞ que contiene en su interior el dominio $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_P$. La curva Γ divide el dominio Ω_E en dos regiones: una acotada, que denotamos Ω^- y otra no acotada, que denotamos Ω^+ . Entonces el problema (4.6) es equivalente a un problema de transmisión que consiste, para cada $t \in (0, T)$, en un *problema parabólico-elíptico* planteado en el dominio *acotado* $\Omega := \Omega_P \cup \Gamma_1 \cup \Omega^-$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} - \nabla \cdot \mathbf{b}(\cdot, u, \nabla u) &= f(t) && \text{en } \Omega_P \\
-\Delta u(t) &= 0 && \text{en } \Omega^- \\
u(t) &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\
u_P(t) &= u_E(t) && \\
\mathbf{b}(\cdot, u_P(t), \nabla u_P(t)) \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial u_E}{\partial \mathbf{n}_1}(t) && \\
u(0) &= u_0 && \text{en } \Omega_P
\end{aligned} \tag{4.7}$$

y un problema elíptico, *lineal y homogéneo*, formulado en la región *no acotada* Ω^+ :

$$\begin{aligned}
-\Delta u(t) &= 0 && \text{en } \Omega^+ \\
u(t) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{4.8}$$

acoplados mediante las condiciones de transmisión sobre Γ :

$$u^-(t) = u^+(t) \quad \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}(t) = \frac{\partial u^+}{\partial \mathbf{n}}(t) \tag{4.9}$$

El vector \mathbf{n} es el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω^- a Ω^+ . Al igual que en los capítulos precedentes, dada una función v definida en Ω^\pm , denotamos por v^\pm el límite de v sobre Γ .

Nótese que la frontera Γ_1 puede hacer el papel de frontera de acoplamiento si es suficientemente regular. Sin embargo, esta frontera es un dato del problema y en principio, no tiene porqué ser una curva de clase \mathcal{C}^∞ . Por esta razón, consideramos la frontera artificial Γ .

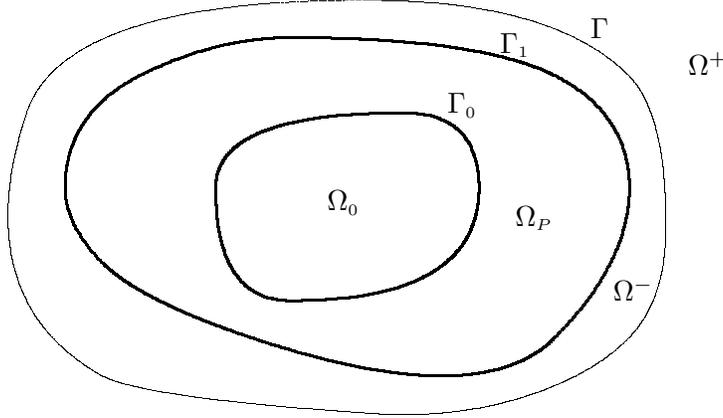


Figura 4.2: Dominio del problema de transmisión

En lo que sigue, suponemos que la función \mathbf{b} satisface la Hipótesis 3.1 en $\overline{\Omega_P} \times \mathbb{R}^3$. Consideramos la forma $a: H^1(\Omega) \times H^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$a(u, v) := a_P(u, v) + a_E(u, v) \quad \forall u, v \in H^1(\Omega)$$

donde

$$a_P(u, v) := \int_{\Omega_P} \mathbf{b}(\mathbf{x}, u, \nabla u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} \quad \text{y} \quad a_E(u, v) := \int_{\Omega^-} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x}$$

En virtud de la Hipótesis 3.1, la forma $a(\cdot, \cdot)$ está bien definida y es *acotada* en $H^1(\Omega)$ (cf. Lema 3.1). En estas condiciones $a(\cdot, \cdot)$ es además *hemicontinua* en $H^1(\Omega)$, esto es, la aplicación

$$s \in [0, 1] \mapsto a(u + sv, w) \in \mathbb{R}$$

es continua, cualesquiera que sean $u, v, w \in H^1(\Omega)$. En efecto, esta propiedad es una consecuencia del Teorema de dependencia continua de la integral respecto a un parámetro (véase, por ejemplo, el Teorema 2.1.6 de A. Kufner et al. [57]).

Designamos por V el subespacio de $H^1(\Omega)$ formado por las funciones de traza nula sobre Γ_0 :

$$V := \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_0} = 0\}$$

También usaremos el subespacio de $H^1(\Omega_P)$ formado por las funciones de traza nula sobre Γ_0 , que denotamos V_P .

Empleando las notaciones anteriores, la solución del problema (4.7) satisface la relación siguiente para cada $v \in V$ y en casi todo punto (c.t.p., en lo que sigue) $t \in (0, T)$,

$$\int_{\Omega_P} \frac{\partial u}{\partial t}(t)v \, d\mathbf{x} + a(u(t), v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}}(t) v^- \, d\sigma = \int_{\Omega_P} f(t)v \, d\mathbf{x}$$

Por otra parte, para cada $t \in (0, T)$, la solución del problema (4.8) se puede calcular en cualquier punto de Ω^+ mediante la fórmula de representación dada en la Proposición 1.9, y por tanto, satisface las ecuaciones integrales periódicas (2.7) y (2.8).

Procediendo del modo habitual, deducimos la siguiente formulación variacional del problema (4.6):

hallar $u \in L^2(0, T; V) \cap \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega_P))$ y $\xi \in L^2(0, T; H_0^{-1/2})$ tales que

$$u(0) = u_0 \quad \text{en } L^2(\Omega_P)$$

y en c.t.p. $t \in (0, T)$ se verifica que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(u(t), v)_{0, \Omega_P} + a(u(t), v) + d(u(t), v) - c(v, \xi(t)) &= (f(t), v)_{0, \Omega_P} \quad \forall v \in V \\ c(u(t), \eta) + b(\xi(t), \eta) &= 0 \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2} \end{aligned}$$

Sea $M := V \times H_0^{-1/2}$ y consideremos la forma $A: M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(\hat{u}, \hat{v}) := a(u, v) + B(\hat{u}, \hat{v}) \quad \forall \hat{u} := (u, \xi), \hat{v} := (v, \eta) \in M$$

donde $B(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal definida en (2.12). Entonces, el problema variacional anterior es equivalente al problema siguiente:

hallar $\hat{u} := (u, \xi) \in L^2(0, T; M)$, $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega_P))$, tal que

$$u(0) = u_0 \quad \text{en } L^2(\Omega_P)$$

y en c.t.p. $t \in (0, T)$ se verifica que

$$\frac{d}{dt}(u(t), v)_{0, \Omega_P} + A(\hat{u}(t), \hat{v}) = (f(t), v)_{0, \Omega_P} \quad \forall \hat{v} \in M \tag{4.10}$$

Lema 4.1. *Supongamos que la función \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1–3.3. Entonces, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es acotada, hemicontinua, fuertemente monótona y Lipschitz-continua en M .*

Prueba. En el Teorema 3.2 se prueba que bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2 la forma $A(\cdot, \cdot)$ es acotada y fuertemente monótona en M . Por otra parte, en el Lema 3.4 se ve que, bajo las Hipótesis 3.1 y 3.3, $A(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua. Por último, gracias a que la forma $B(\cdot, \cdot)$ es bilineal, la forma $A(\cdot, \cdot)$ hereda la hemicontinuidad de $a(\cdot, \cdot)$. ■

4.3. El problema discreto

Por simplicidad en la exposición, en lo que sigue suponemos que las fronteras Γ_0 y Γ_1 son poligonales. En esta sección damos un esquema discreto para resolver el problema (4.10). Empleamos el método de Euler implícito (o regresivo) para la discretización de la variable temporal, y las mismas técnicas que en los capítulos anteriores para resolver el problema en cada paso de tiempo. Para ello, consideramos dos familias de particiones: una del intervalo $[0, T]$ y otra del intervalo $[0, 1]$.

Dados dos números enteros positivos, N_0 y N_1 , designamos por $\Delta t := T/N_0$ el paso de discretización en tiempo, y por $h := 1/N_1$ el paso de discretización en espacio. Denotamos por $t_n := n\Delta t$ ($n = 0, \dots, N_0$) los nodos de la partición uniforme del intervalo $[0, T]$ de paso Δt . Consideramos también la partición uniforme de la recta real de paso h , $z_i := ih$ ($i \in \mathbb{Z}$).

Sea $(\tau_h)_h$ una familia *regular* de triangulaciones exactas del dominio $\overline{\Omega}$. Suponemos que τ_h es compatible con la interfaz Γ_1 y denotamos por $\tau_{h,E}$ y $\tau_{h,P}$ las triangulaciones de los dominios $\overline{\Omega}^-$ y $\overline{\Omega}_P$ determinadas por τ_h . Sea σ_h el conjunto de los vértices de la triangulación τ_h . Suponemos que $\sigma_h \cap \Gamma = \{\mathbf{x}(z_i)\}_{i=0}^{N_1}$, donde \mathbf{x} es una parametrización 1-periódica de la curva Γ .

Designamos por V_h el espacio de las funciones continuas en $\overline{\Omega}$, de traza nula sobre Γ_0 y tales que sobre cada triángulo $T \in \tau_h$, pertenecen al espacio $\mathcal{P}_1(T)$, es decir,

$$V_h := \{v_h \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) ; v_h|_T \in \mathcal{P}_1(T) \quad \forall T \in \tau_h ; v_h|_{\Gamma_0} = 0\}$$

Consideramos el espacio producto $M_h := V_h \times H_h$. Sea $(u_{0,h})_h$ una sucesión de funciones continuas en $\overline{\Omega}_P$ tales que sobre cada $T \in \tau_{h,P}$, $u_{0,h} \in \mathcal{P}_1(T)$. Suponemos que

$$u_{0,h} \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^2(\Omega_P) \tag{4.11}$$

En lo que sigue, $f \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega_P))$. Consideramos el esquema de Euler implícito siguiente:

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h^n := (u_h^n, \xi_h^n) \in M_h \quad (n = 1, \dots, N_0) \text{ tal que} \\ &(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_{0, \Omega_P} + \Delta t A(\hat{u}_h^n, \hat{v}_h) = \Delta t (f(t_n), v_h)_{0, \Omega_P} \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \tag{4.12}$$

donde denotamos $u_h^0 := u_{0,h}$. Las soluciones del esquema (4.12) son los valores aproximados de $\hat{u}(t_n)$ ($n = 1, \dots, N_0$). La *diferencia regresiva* $\Delta t^{-1} (u_h^n - u_h^{n-1})|_{\Omega_P}$ es una aproximación de $u'(t_n)|_{\Omega_P}$.

Teorema 4.2. *Supongamos que \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces, el problema (4.12) tiene una única solución para h suficientemente pequeño.*

Prueba. Sean $\{\phi_i\}_{i=1}^{d_1}$ y $\{\psi_k\}_{k=1}^{d_2}$ bases de V_h y H_h , respectivamente, y sea $D := d_1 + d_2$. Para $d = 1, \dots, D$, consideramos las funciones $\widehat{\Psi}_d$ dadas por

$$\widehat{\Psi}_d := \begin{cases} (\phi_d, 0) & \text{si } d \in \{1, \dots, d_1\} \\ (0, \psi_{d-d_1}) & \text{si } d \in \{d_1 + 1, \dots, D\} \end{cases}$$

El conjunto $\{\widehat{\Psi}_d\}_{d=1}^D$ es una base del espacio M_h . Entonces, para $n = 1, \dots, N_0$, $\hat{u}_h^n = \sum_{d=1}^D u_d^n \widehat{\Psi}_d$ y el problema (4.12) es equivalente a los N_0 sistemas de ecuaciones no lineales siguientes:

$$\mathbf{f}(\mathbf{u}^n) = \mathbf{g}^n \quad (n = 1, \dots, N_0) \quad (4.13)$$

donde

$$\mathbf{f}_i(\mathbf{u}) := \begin{cases} \sum_{j=1}^{d_1} u_j (\phi_j, \phi_i)_{0, \Omega_P} + \Delta t A \left(\sum_{j=1}^D u_j \widehat{\Psi}_j, \widehat{\Psi}_i \right) & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1\} \\ \Delta t A \left(\sum_{j=1}^D u_j \widehat{\Psi}_j, \widehat{\Psi}_i \right) & \text{si } i \in \{d_1 + 1, \dots, D\} \end{cases}$$

y

$$\mathbf{g}_i^n := \begin{cases} (u_h^{n-1}, \phi_i)_{0, \Omega_P} + \Delta t (f(t_n), \phi_i)_{0, \Omega_P} & \text{si } i \in \{1, \dots, d_1\} \\ 0 & \text{si } i \in \{d_1 + 1, \dots, D\} \end{cases}$$

Bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es hemicontinua y fuertemente monótona (cf. Lema 4.1). Empleando estas propiedades, es sencillo comprobar que \mathbf{f} es hemicontinua, estrictamente monótona y coerciva. Entonces, en virtud de los Teoremas 27.1 y 27.3 de J. Oden [77], cada uno de los sistemas (4.13) tiene una única solución. ■

Nota. *El resultado anterior es cierto bajo condiciones más débiles sobre los coeficientes. En efecto, la Hipótesis 3.2 se puede sustituir por ciertas condiciones bajo las cuales la forma $A(\cdot, \cdot)$ es monótona y coerciva en M . Empleando estas propiedades de la forma $A(\cdot, \cdot)$ se deduce que la función \mathbf{f} del Teorema 4.2 es estrictamente monótona y coerciva.*

4.4. Un resultado de existencia, unicidad y convergencia

En este apartado probamos la existencia y unicidad de solución del problema (4.10), y un resultado de convergencia en $L^2(0, T; M)$. Para ello, usamos la *estimación a priori* del error que se da en el Lema siguiente. Denotamos por $\hat{u}_{h,e} := (u_{h,e}, \xi_{h,e})$ la función escalonada definida por

$$\hat{u}_{h,e}(t) := \begin{cases} \hat{u}_h^n & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, \dots, N_0) \\ \hat{u}_h^1 & \text{si } t = 0 \end{cases} \quad (4.14)$$

Lema 4.3. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces, si Δt es suficientemente pequeño, existe una constante $C > 0$, independiente de Δt y de h , tal que*

$$\|u_{h,e}(T)\|_{0,\Omega_P} + \|\hat{u}_{h,e}\|_{L^2(0,T;M)} \leq C$$

Prueba. La prueba de este resultado es clásica. Poniendo $\hat{v}_h = \hat{u}_h^n$ en la ecuación (4.12) y sumando desde $n = 1$ hasta $n = N_0$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N_0} (u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n)_{0,\Omega_P} + \Delta t \sum_{n=1}^{N_0} A(\hat{u}_h^n, \hat{u}_h^n) = \Delta t \sum_{n=1}^{N_0} (f(t_n), u_h^n)_{0,\Omega_P}$$

Nótese que

$$\sum_{n=1}^{N_0} (u_h^n - u_h^{n-1}, u_h^n)_{0,\Omega_P} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{N_0} \|u_h^n - u_h^{n-1}\|_{0,\Omega_P}^2 + \frac{1}{2} \|u_h^{N_0}\|_{0,\Omega_P}^2 - \frac{1}{2} \|u_{0,h}\|_{0,\Omega_P}^2$$

Entonces, utilizando la hipótesis (4.11) y la monotonía fuerte de la forma $A(\cdot, \cdot)$, tenemos que

$$\frac{1}{2} \|u_h^{N_0}\|_{0,\Omega_P}^2 + \hat{\alpha} \sum_{n=1}^{N_0} \|\hat{u}_h^n\|_M^2 \leq C + \Delta t \sum_{n=1}^{N_0} \|f(t_n)\|_{0,\Omega_P} \|\hat{u}_h^n\|_M$$

El resultado se deduce aplicando la desigualdad

$$ab \leq \frac{a^2}{2\epsilon} + \frac{\epsilon b^2}{2} \quad \forall \epsilon > 0 \quad (4.15)$$

con $a = \|f(t_n)\|_{0,\Omega_P}$, $b = \|\hat{u}_h^n\|_M$ y $\epsilon = \hat{\alpha}$. ■

La convergencia de las soluciones aproximadas de problemas parabólico-elípticos obtenidas mediante discretizaciones por elementos finitos fue estudiada primero

por M. Zlámal [105, 106] y más tarde por A. Ženíšek [100]. La prueba que damos aquí sigue esencialmente la dada en [100], aunque presenta algunas simplificaciones debidas a que en [100] la solución exacta se busca en el subespacio de $L^2(0, T; V)$ formado por las funciones cuya derivada en Ω_P pertenece al espacio $L^2(0, T; V'_P)$. Emplearemos el siguiente resultado auxiliar, que se puede verificar fácilmente.

Lema 4.4. *Sea $\phi \in C^\infty([0, T])$. Definimos las funciones escalonadas*

$$\phi_e(t) := \begin{cases} \phi(t_n) & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, \dots, N_0) \\ \phi(t_1) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

y

$$\tilde{\phi}_e(t) := \begin{cases} \frac{\phi(t_{n+1}) - \phi(t_n)}{\Delta t} & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, \dots, N_0) \\ \frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{\Delta t} & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde $\phi(t_{N_0+1}) := \phi(T)$. Entonces existen constantes positivas, C_1 y C_2 , que dependen de la función ϕ , tales que

$$\|\phi_e - \phi\|_{0,(0,T)} \leq C_1 \Delta t \quad \|\tilde{\phi}_e - \phi'\|_{0,(0,T)} \leq C_2 \Delta t^{1/2}$$

En lo que sigue, $f_e: [0, T] \rightarrow L^2(\Omega_P)$ es la función escalonada dada por

$$f_e(t) := \begin{cases} f(t_n) & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, \dots, N_0) \\ f(t_1) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Teorema 4.5. *Supongamos que la función \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces el problema (4.10) tiene una única solución $\hat{u} := (u, \xi)$. Además, la sucesión $(\hat{u}_{h,e})_h$ converge a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$.*

Prueba. Damos un esquema con los pasos de la demostración:

Etapa 1. En virtud del Lema 4.3, como los espacios $L^2(\Omega_P)$ y $L^2(0, T; M)$ son reflexivos, se pueden extraer subsucesiones $(u_{h',e}(T))_{h'}$ de $(u_{h,e}(T))_h$ y $(\hat{u}_{h',e})_{h'}$ de $(\hat{u}_{h,e})_h$ débilmente convergentes en $L^2(\Omega_P)$ y en $L^2(0, T; M)$, respectivamente; es decir, existen funciones $g \in L^2(\Omega_P)$ y $\hat{u} := (u, \xi) \in L^2(0, T; M)$ tales que

$$(u_{h',e}(T), v)_{0,\Omega_P} \rightarrow (g, v)_{0,\Omega_P} \quad \forall v \in L^2(\Omega_P) \quad (4.16)$$

$$(\hat{u}_{h',e}, \hat{v})_{L^2(0,T;M)} \rightarrow (\hat{u}, \hat{v})_{L^2(0,T;M)} \quad \forall \hat{v} \in L^2(0, T; M) \quad (4.17)$$

Sean $\hat{w} := (w, \zeta) \in M$ y $\phi \in C^\infty([0, T])$. Consideramos una sucesión $(\hat{w}_h)_h$, $\hat{w}_h \in M_h$, tal que

$$\hat{w}_h \rightarrow \hat{w} \quad \text{en } M \quad (4.18)$$

Poniendo $\hat{v}_h = \hat{w}_h \phi(t_n)$ en la ecuación (4.12) y sumando desde $n = 1$ hasta $n = N_0$, obtenemos

$$\sum_{n=1}^{N_0} (u_h^n - u_h^{n-1}, w_h)_{0, \Omega_P} \phi(t_n) + \Delta t \sum_{n=1}^{N_0} A(\hat{u}_h^n, \hat{w}_h) \phi(t_n) = \Delta t \sum_{n=1}^{N_0} (f(t_n), w_h)_{0, \Omega_P} \phi(t_n)$$

Efectuando una sumación por partes, se deduce que

$$\begin{aligned} \int_0^T (f_e(t), w_h)_{0, \Omega_P} \phi_e(t) dt &= \int_0^T A(\hat{u}_{h,e}(t), \hat{w}_h) \phi_e(t) dt \\ &\quad - \int_0^T (u_{h,e}(t), w_h)_{0, \Omega_P} \tilde{\phi}_e(t) dt \\ &\quad + (u_{h,e}(T), w_h)_{0, \Omega_P} \phi(T) - (u_{0,h}, w_h)_{0, \Omega_P} \phi(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.19)$$

Etapa 2. Debido a la no linealidad de la forma $A(\cdot, \cdot)$, no podemos pasar al límite en la identidad (4.19) directamente. Para cada h' y cada $t \in [0, T]$, consideramos el funcional $\chi_{h'}(t) \in M'$ definido mediante la relación

$$\langle \chi_{h'}(t), \hat{v} \rangle := A(\hat{u}_{h',e}(t), \hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in M \quad (4.20)$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle$ indica la dualidad entre M' y M . Empleando las propiedades de la forma $A(\cdot, \cdot)$, es sencillo comprobar que la sucesión $(\chi_{h'})_{h'}$ es acotada en $L^2(0, T; M')$, que es un espacio reflexivo. Por tanto, existe un elemento $\chi \in L^2(0, T; M')$ y una subsucesión de $(\chi_{h'})_{h'}$, que denotamos de la misma manera, que converge débilmente a χ en $L^2(0, T; M')$, es decir,

$$\langle \chi_{h'}, \hat{v} \rangle \rightarrow \langle \chi, \hat{v} \rangle \quad \forall \hat{v} \in L^2(0, T; M) \quad (4.21)$$

Etapa 3. Pasando al límite cuando $h' \rightarrow 0$ en la relación (4.19) tenemos, en virtud de la desigualdad de Cauchy-Schwarz, el Lema 4.4 y las propiedades (4.11), (4.16)–(4.18) y (4.21),

$$\begin{aligned} (g, w)_{0, \Omega_P} \phi(T) - (u_0, w)_{0, \Omega_P} \phi(0) - \int_0^T (u(t), w)_{0, \Omega_P} \phi'(t) dt \\ + \int_0^T \langle \chi(t), \hat{w} \rangle \phi(t) dt = \int_0^T (f(t), w)_{0, \Omega_P} \phi(t) dt \end{aligned} \quad (4.22)$$

Tomando $\phi \in \mathcal{C}_0^\infty(0, T)$ e integrando por partes, se tiene que

$$\frac{d}{dt} (u(t), w)_{0, \Omega_P} = (f(t), w)_{0, \Omega_P} - \langle \chi(t), \hat{w} \rangle \quad \text{en c.t.p. } t \in (0, T) \quad \forall \hat{w} \in M \quad (4.23)$$

Gracias a la regularidad de las funciones u , f y χ , la aplicación

$$t \in (0, T) \mapsto (u(t), w)_{0, \Omega_P} \in H^1(0, T)$$

y por tanto, se identifica con una función continua en el intervalo cerrado $[0, T]$. Así, $u \in \mathcal{C}([0, T]; L^2(\Omega_P))$. Por otra parte, de la relación (4.23) se deduce que para cada $\hat{w} \in M$ y para cada $t \in [0, T]$,

$$(u(t), w)_{0, \Omega_P} = (u(0), w)_{0, \Omega_P} + \int_0^t \{(f(s), w)_{0, \Omega_P} - \langle \chi(s), \hat{w} \rangle\} ds$$

Si consideramos de nuevo la relación (4.22) para $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$ con $\phi(0) = 1$ y $\phi(T) = 0$, e integramos por partes, obtenemos que $u(0) = u_0$ en $L^2(\Omega_P)$. De forma similar, se deduce que $g = u(T)$ en $L^2(\Omega_P)$.

Etapa 4. En esta etapa, probamos que \hat{u} satisface la ecuación del problema (4.10) y que la subsucesión $(\hat{u}_{h', e})_{h'}$ converge a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$. Recordemos que bajo las Hipótesis 3.1 y 3.2, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es fuertemente monótona en M . Luego, para cualquier $\hat{v} \in M$,

$$\begin{aligned} D_{h'}(\hat{v}) &:= \int_0^T (A(\hat{u}_{h', e}(t), \hat{u}_{h', e}(t) - \hat{v}) - A(\hat{v}, \hat{u}_{h', e}(t) - \hat{v})) dt \\ &\geq \|\hat{u}_{h', e}(t) - \hat{v}\|_M^2 \geq 0 \end{aligned} \quad (4.24)$$

Procediendo como en la prueba del Lema 4.3, se deduce

$$\int_0^T A(\hat{u}_{h', e}(t), \hat{u}_{h', e}(t)) dt \leq \frac{1}{2} \|u_{0, h'}\|_{0, \Omega_P}^2 - \frac{1}{2} \|u_{h', e}(T)\|_{0, \Omega_P}^2 + \int_0^T (f_e(t), u_{h', e}(t))_{0, \Omega_P}$$

De las dos últimas relaciones, la definición (4.20) y las propiedades (4.16), (4.17) y (4.21), tenemos que para cada $\hat{v} \in M$,

$$0 \leq \limsup_{h' \rightarrow 0} D_{h'}(\hat{v}) \leq \int_0^T \langle \chi(t), \hat{u}(t) - \hat{v} \rangle dt - \int_0^T A(\hat{v}, \hat{u}(t) - \hat{v}) dt \quad (4.25)$$

Dada $\hat{w} \in L^2(0, T; M)$, tomamos $\hat{v} = \hat{u}(t) - \theta \hat{w}(t)$, con $\theta \in (0, 1)$. Como la forma $A(\cdot, \cdot)$ es hemicontinua y acotada, pasando al límite en (4.25) cuando $\theta \rightarrow 0$ y aplicando el Teorema de la convergencia dominada, se obtiene

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}\hat{u}(t), \hat{w}(t) \rangle dt \geq 0 \quad \forall \hat{w} \in L^2(0, T; M)$$

Y, por linealidad, deducimos

$$\int_0^T \langle \chi(t) - \mathcal{A}\hat{u}(t), \hat{w}(t) \rangle dt = 0 \quad \forall \hat{w} \in L^2(0, T; M)$$

En particular, tomando $\hat{w}(x, t) = \hat{v}(x)\phi(t)$, para $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ y $\hat{v} \in M$, se tiene

$$\langle \chi(t), \hat{v} \rangle = A(\hat{u}(t), \hat{v}) \quad \text{en c.t.p. } t \in (0, T) \quad \forall \hat{v} \in M$$

Por tanto, \hat{u} satisface la ecuación del problema (4.10). Por último, tomando $\hat{v} = \hat{u}$ en (4.25) y teniendo en cuenta la relación (4.24), se deduce que la subsucesión $(\hat{u}_{h',e})_{h'}$ converge a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$.

Etapa 5. La unicidad de solución se prueba de la forma habitual. Para probar la convergencia de la sucesión $(\hat{u}_{h,e})_h$ a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$ también se emplean argumentos estándar. ■

Nota. Para probar el Lema 4.3, basta suponer que \mathbf{b} satisface condiciones bajo las cuales la forma $A(\cdot, \cdot)$ es monótona y coerciva. En este caso la prueba es análoga a la dada en A. Ženíšek [100]. Por otra parte, de la demostración del Teorema 4.5, es claro que la existencia y unicidad de solución del problema (4.10) también se puede obtener en estas condiciones; la Hipótesis 3.2 solo es necesaria para asegurar que la sucesión $(\hat{u}_{h,e})_h$ converge a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$.

4.5. Estimaciones del error

En este apartado, suponemos que la solución del problema (4.10) tiene la regularidad $H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in [0, 1)$, y obtenemos estimaciones del error en términos de los parámetros de discretización Δt y h empleando las técnicas usuales (cf. V. Thomée [91], P.A. Raviart y J.M. Thomas [80]). En vez de utilizar el operador de proyección elíptico, que requiere el uso de técnicas de dualidad, empleamos el operador de interpolación definido por C. Bernardi [5]. Este operador se basa en una proyección L^2 local y es una generalización del operador de interpolación de Ph. Clément [19].

Dada $u \in L^1(\Omega)$, denotamos $\Pi_h u$ la interpolada de u en V_h ; la definición del operador de interpolación Π_h puede verse en C. Bernardi [5, sección V].

Lema 4.6. Si $u \in V \cap H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in [0, 1)$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|u - \Pi_h u\|_{k,\Omega} \leq Ch^{1+\sigma-k} \|u\|_{1+\sigma,\Omega} \quad (k = 0, 1) \quad (4.26)$$

Prueba. En C. Bernardi [5] se prueba que si $u \in V \cap H^m(\Omega)$ ($m = 1, 2$), existe una constante $C > 0$ independiente de h tal que

$$\|u - \Pi_h u\|_{k,\Omega} \leq Ch^{m-k} \|u\|_{m,\Omega} \quad (k = 0, 1)$$

Entonces, utilizando la teoría de interpolación de espacios de Sobolev (cf. J.L. Lions y E. Magenes [62]) deducimos que para $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$,

$$\|u - \Pi_h u\|_{k,\Omega} \leq (C h^{1-k})^{1-\sigma} (C h^{2-k})^\sigma \|u\|_{1+\sigma,\Omega} = C h^{1+\sigma-k} \|u\|_{1+\sigma,\Omega}$$

■

Teorema 4.7. *Supongamos que la solución del problema (4.10) posee las propiedades siguientes:*

1. $u \in \mathcal{C}((0, T]; H^{1+\sigma}(\Omega))$
2. $u' \in L^2(0, T; H^1(\Omega))$
3. $u'' \in L^2(0, T; V'_P)$
4. $u_0 \in H^1(\Omega_P)$

y que existe una constante C independiente de h tal que

$$\|u_0 - u_{0,h}\|_{0,\Omega_P} \leq C h \|u_0\|_{1,\Omega_P} \quad (4.27)$$

Entonces, si se verifican las Hipótesis 3.1, 3.2 y 3.3, existe una constante $C > 0$, independiente de h y de Δt , tal que

$$\|\hat{u}_e - \hat{u}_{h,e}\|_{L^2(0,T;M)} \leq C(h^\sigma + \Delta t)$$

donde \hat{u}_e es la función escalonada dada por

$$\hat{u}_e(t) := \begin{cases} \hat{u}(t_n) & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \quad (n = 1, \dots, N_0) \\ \hat{u}(t_1) & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

Prueba. Sea $\pi_h: H^0 \rightarrow H_h$ el operador de proyección ortogonal en H^0 , es decir, dado $\xi \in H^0$, $\pi_h \xi \in H_h$ es la única función que satisface

$$(\xi - \pi_h \xi, \eta_h) = 0 \quad \forall \eta_h \in H_h$$

Consideramos el operador $\hat{\Pi}_h: L^1(\Omega) \times H^0 \rightarrow M_h$ dado por

$$\hat{\Pi}_h \hat{v} := (\Pi_h v, \pi_h \eta) \quad \forall \hat{v} := (v, \eta) \in L^1(\Omega) \times H^0$$

Para $n = 1, \dots, N_0$, denotamos por $\hat{e}_h^n = (e_h^n, \epsilon_h^n) := \hat{u}_h^n - \hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n)$, esto es,

$$e_h^n = u_h^n - \tilde{u}_h^n \quad \text{y} \quad \epsilon_h^n = \xi_h^n - \pi_h \xi(t_n)$$

donde $\tilde{u}_h^n := \Pi_h u(t_n)$. Escogemos $\tilde{u}_h^0 := u_{0,h}$ y ponemos $e_h^0 := 0$. Nótese que en las condiciones del Teorema, \hat{u} satisface la ecuación (4.10) para cada $t \in (0, T]$. Usando que $(\hat{u}_h^n)_{n=1}^{N_0}$ es la solución del problema (4.12), deducimos que

$$\begin{aligned}
(e_h^n - e_h^{n-1}, v_h)_{0, \Omega_P} &+ \Delta t (A(\hat{u}_h^n, \hat{v}_h) - A(\widehat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \\
&= (\Delta t u'(t_n) - (u(t_n) - u(t_{n-1})), v_h)_{0, \Omega_P} \\
&+ \Delta t (A(\hat{u}(t_n), \hat{v}_h) - A(\widehat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \\
&+ (u(t_n) - u(t_{n-1}) - (\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}), v_h)_{0, \Omega_P}
\end{aligned} \tag{4.28}$$

A continuación, estimamos los términos que aparecen en el segundo miembro de la expresión anterior. Haciendo un desarrollo de Taylor con resto integral de orden uno en V_P' , tenemos que

$$(\Delta t u'(t_n) - (u(t_n) - u(t_{n-1})), v_h)_{0, \Omega_P} = \left\langle \int_{t_{n-1}}^{t_n} (t_{n-1} - t) u''(t) dt, v_h \right\rangle_P$$

donde $\langle \cdot, \cdot \rangle_P$ designa el producto de dualidad entre V_P' y V_P . Usando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deducimos que

$$\left| (\Delta t u'(t_n) - (u(t_n) - u(t_{n-1})), v_h)_{0, \Omega_P} \right| \leq \Delta t^{3/2} \|u''\|_{L^2(0, T; V_P')} \|v_h\|_{0, \Omega_P}$$

Por otra parte, bajo las Hipótesis 3.1 y 3.3, la forma $A(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua. Luego, aplicando el Lema 4.6 se tiene que

$$\left| \Delta t (A(\hat{u}(t_n), \hat{v}_h) - A(\widehat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \right| \leq C \Delta t h^\sigma \|u(t_n)\|_{1+\sigma, \Omega} \|\hat{v}_h\|_M$$

Por último, empleando el Lema 4.6 tenemos, para $n = 2, \dots, N_0$,

$$\begin{aligned}
\left| (u(t_n) - u(t_{n-1}) - (\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}), v_h)_{0, \Omega_P} \right| &\leq Ch \|u(t_n) - u(t_{n-1})\|_{1, \Omega} \|v_h\|_{0, \Omega_P} \\
&\leq C \Delta t^{1/2} h \|u'\|_{L^2(0, T; H^1(\Omega))} \|v_h\|_{0, \Omega_P}
\end{aligned}$$

Si $n = 1$, empleamos el Lema 4.6 y la desigualdad (4.27) para deducir

$$\left| (u(t_1) - u_0 - (\tilde{u}_h^1 - \tilde{u}_h^0), v_h)_{0, \Omega_P} \right| \leq Ch (\|u(t_1)\|_{1, \Omega} + \|u_0\|_{1, \Omega_P}) \|v_h\|_{0, \Omega_P}$$

El resultado se sigue poniendo $\hat{v}_h = \hat{e}_h^n$ ($n = 1, \dots, N_0$) en (4.28), usando la monotonía fuerte de $A(\cdot, \cdot)$ y aplicando reiteradamente la desigualdad (4.15). ■

4.6. Un esquema completamente discreto

En la práctica, no es posible resolver el problema (4.12) directamente, puesto que no sabemos calcular de forma exacta todos los coeficientes del sistema. Por tanto, es necesario el uso de fórmulas de cuadratura para calcularlos de forma aproximada. En esta sección proponemos un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de integración numérica.

Sea $a_h : V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ la forma dada por

$$a_h(u_h, v_h) := a_{h,P}(u_h, v_h) + a_{h,E}(u_h, v_h) \quad \forall u_h, v_h \in V_h$$

donde

$$a_{h,P}(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_{h,P}} Q_T(\mathbf{b}(\cdot, u_h, \nabla u_h) \cdot \nabla v_h)$$

y

$$a_{h,E}(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_{h,E}} Q_T(\nabla u_h \cdot \nabla v_h)$$

siendo Q_T la fórmula de cuadratura (2.25). Aproximamos la forma $A(\cdot, \cdot)$ por la forma $A_h : M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) := a_h(u_h, v_h) + B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

donde $B_h(\cdot, \cdot)$ está dada por (2.35). Si la función \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1 y 3.2, las formas $A_h(\cdot, \cdot)$ son uniformemente fuertemente monótonas y acotadas en M_h , para $h \leq h_0$ (cf. Teorema 3.8).

Finalmente, definimos la siguiente perturbación de $(f(t_n), v_h)_{0, \Omega_P}$:

$$(f(t_n), v_h)_{h,P} := \sum_{T \in \tau_{h,P}} Q_T(f(t_n)v_h) \quad \forall v_h \in V_h$$

Planteamos el siguiente esquema para resolver el problema (4.12):

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h^n := (u_h^n, \xi_h^n) \in M_h \quad (n = 1, \dots, N_0) \text{ tal que} \\ &(u_h^n - u_h^{n-1}, v_h)_{0, \Omega_P} + \Delta t A_h(\hat{u}_h^n, \hat{v}_h) = \Delta t (f(t_n), v_h)_{h,P} \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \quad (4.29)$$

donde $u_h^0 := u_{0,h}$ es una función continua en $\overline{\Omega}_P$ tal que su restricción a cada triángulo $T \in \tau_{h,P}$ pertenece al espacio $\mathcal{P}_1(T)$. Suponemos que

$$u_h^0 \rightarrow u_0 \quad \text{en } L^2(\Omega_P)$$

La prueba de la existencia y unicidad de solución del esquema (4.29) es análoga a la del Teorema 4.2.

Teorema 4.8. *Supongamos que \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces el problema (4.29) tiene una única solución, para h suficientemente pequeño.*

Nota. *Los términos de la forma $(u_h, v_h)_{0, \Omega_P}$, con $u_h, v_h \in V_h$, se calculan de forma exacta ya que la triangulación $\tau_{h,P}$ solo contiene triángulos rectos. No obstante, en la práctica suele emplearse la fórmula de cuadratura de los vértices para calcular estos términos de forma aproximada. Esto es debido a que entonces la matriz de masa es diagonal. Esta técnica se conoce como el método de “lumped masses” (ver V. Thomée [91]).*

4.7. El efecto de la integración numérica

Para estudiar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia, es necesario imponer condiciones más fuertes sobre la función \mathbf{b} . En lo que sigue, suponemos que se verifican las Hipótesis 3.1–3.4 en el dominio $\overline{\Omega_P} \times \mathbb{R}^3$. Sea $\hat{u}_{h,e}: [0, T] \rightarrow M_h$, $\hat{u}_{h,e} := (u_{h,e}, \xi_{h,e})$ la función escalonada definida por

$$\hat{u}_{h,e}(t) := \begin{cases} \hat{u}_h^n & \text{si } t \in (t_{n-1}, t_n] \ (n = 1, \dots, N_0) \\ \hat{u}_h^1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

donde $(\hat{u}_h^n)_{n=1}^{N_0}$ es la solución del esquema (4.29).

Lema 4.9. *Supongamos que se verifican las Hipótesis 3.1 y 3.2. Entonces, si Δt es suficientemente pequeño, existe una constante $C > 0$, independiente de h y de Δt , tal que*

$$\|u_{h,e}(T)\|_{0, \Omega_P} + \|\hat{u}_{h,e}\|_{L^2(0, T; M)} \leq C$$

Prueba. La prueba es similar a la del Lema 4.3. ■

Teorema 4.10. *Supongamos que la función \mathbf{b} satisface las Hipótesis 3.1–3.4 y que $f \in \mathcal{C}([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega_P))$. Entonces, la sucesión $(\hat{u}_{h,e})_h$ converge en $L^2(0, T; M)$ a la solución del problema (4.10).*

Prueba. Por el Lema 4.9, se pueden extraer subsucesiones $(u_{h',e}(T))_{h'}$ de $(u_{h,e}(T))_h$ y $(\hat{u}_{h',e})_{h'}$ de $(\hat{u}_{h,e})_h$ débilmente convergentes a g^* en $L^2(\Omega_P)$ y a \hat{u}^* en $L^2(0, T; M)$, respectivamente. Sea $\phi \in \mathcal{C}^\infty([0, T])$. Dada $\hat{w} \in M$, consideramos una sucesión $(\hat{w}_h)_h$, $\hat{w}_h \in M_h$, que converge a \hat{w} en M . Poniendo $\hat{v}_h = \hat{w}_h \phi(t_n)$ ($n = 1, \dots, N_0$)

en la ecuación (4.29) y sumando por partes, llegamos a que

$$\begin{aligned} \int_0^T (f_e(t), w_h)_{h,P} \phi_e(t) dt &= \int_0^T (u_{h,e}(t), w_h)_{0,\Omega_P} \tilde{\phi}_e(t) dt \\ &\quad - \int_0^T A_h(\hat{u}_{h,e}(t), \hat{w}_h) \phi_e(t) dt \\ &\quad + (u_{h,e}(T), w_h)_{0,\Omega_P} \phi(T) - (u_{0,h}, w_h)_{0,\Omega_P} \phi(\Delta t) \end{aligned} \quad (4.30)$$

Para cada h' y para cada $t \in [0, T]$, consideramos el funcional $\chi_{h'}^*(t) \in M'$ definido por

$$\langle \chi_{h'}^*(t), \hat{v} \rangle := A(\hat{u}_{h',e}(t), \hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in M$$

En virtud de la etapa 3 de la demostración del Teorema 4.5, se puede extraer una subsucesión de $(\chi_{h'}^*)_{h'}$ (que denotaremos de la misma manera), que converge débilmente a un elemento $\chi^* \in L^2(0, T; M')$.

Aplicando la Proposición 3.11 y la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deducimos que

$$\int_0^T (A_{h'}(\hat{u}_{h',e}(t), \hat{w}_{h'}) - A(\hat{u}_{h',e}(t), \hat{w}_{h'})) \phi_e(t) dt \longrightarrow 0$$

De forma similar, por el Lema 2.7 se tiene que

$$\int_0^T ((f_e(t), w_{h'})_{h,P} - (f_e(t), w_{h'})_{0,\Omega_P}) \phi_e(t) dt \longrightarrow 0$$

Así, pasando al límite cuando $h' \rightarrow 0$ en la relación (4.30), obtenemos que

$$\begin{aligned} (g^*, w)_{0,\Omega_P} \phi(T) - (u_0, w)_{0,\Omega_P} \phi(0) - \int_0^T (u^*(t), w)_{0,\Omega_P} \phi'(t) dt \\ + \int_0^T \langle \chi^*(t), \hat{w} \rangle \phi(t) dt = \int_0^T (f(t), w)_{0,\Omega_P} \phi(t) dt \end{aligned} \quad (4.31)$$

De la demostración del Teorema 4.5, deducimos que \hat{u}^* es la solución del problema (4.10), es decir, $\hat{u}^* = \hat{u}$, y que la sucesión $(\hat{u}_{h,e})_h$ converge a \hat{u} en $L^2(0, T; M)$. ■

A continuación damos estimaciones del error para las soluciones de los esquemas completamente discretos (4.29). Probamos que el orden de convergencia es el mismo que para el esquema (4.12).

Teorema 4.11. *En las condiciones del Teorema 4.7, si además se satisfacen las Hipótesis 3.1–3.4 y $f \in \mathcal{C}([0, T]; W^{1,\infty}(\Omega_P))$, existe una constante C , independiente de h y de Δt , tal que*

$$\|\hat{u}_e - \hat{u}_{h,e}\|_{L^2(0,T;M)} \leq C(h^\sigma + \Delta t)$$

Prueba. Para $n = 1, \dots, N_0$, denotamos $\hat{e}_h^n := \hat{u}_h^n - \hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n)$ y $\tilde{u}_h^n := \Pi_h u(t_n)$. Sea $e_h^0 := 0$ y $\tilde{u}_h^0 := u_{0,h}$. Notando que $(\hat{u}_h^n)_{n=1}^{N_0}$ es la solución del esquema (4.29) y que en las condiciones del Teorema, \hat{u} satisface la ecuación (4.10) para cada $t \in (0, T]$, deducimos que

$$\begin{aligned}
(e_h^n - e_h^{n-1}, v_h)_{0, \Omega_P} &+ \Delta t (A_h(\hat{u}_h^n, \hat{v}_h) - A_h(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \\
&= (\Delta t u'(t_n) - (u(t_n) - u(t_{n-1})), v_h)_{0, \Omega_P} \\
&+ \Delta t (A(\hat{u}(t_n), \hat{v}_h) - A(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \\
&+ (u(t_n) - u(t_{n-1}) - (\tilde{u}_h^n - \tilde{u}_h^{n-1}), v_h)_{0, \Omega_P} \\
&+ \Delta t (A(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h) - A_h(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \\
&+ \Delta t ((f(t_n), v_h)_{h,P} - (f(t_n), v_h)_{0, \Omega_P})
\end{aligned}$$

En virtud de la Proposición 3.11 y la continuidad de $\hat{\Pi}_h: M \rightarrow M_h$,

$$\left| (A(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h) - A_h(\hat{\Pi}_h \hat{u}(t_n), \hat{v}_h)) \right| \leq C h \|\hat{u}(t_n)\|_M \|\hat{v}_h\|_M$$

Por otra parte, aplicando el Lema 2.7, se tiene que

$$|(f(t_n), v_h)_{h,P} - (f(t_n), v_h)_{0, \Omega_P}| \leq C h \|f\|_{\mathcal{C}([0, T]; W^{1, \infty}(\Omega_P))} \|\hat{v}_h\|_M$$

El resto de la prueba es análoga a la del Teorema 4.7. ■

Capítulo 5

Un problema elíptico cuasi-lineal

El método simétrico de acoplamiento, introducido simultáneamente por M. Costabel [20] y H. Han [48], fue generalizado de forma satisfactoria para problemas de contorno no lineales que son homogéneos y lineales con coeficientes constantes en el exterior de una región acotada. En estas extensiones, el análisis del error se da siempre cuando el operador no lineal es fuertemente monótono y Lipschitz-continuo. Esto es debido a que en estas condiciones se satisface una versión del Lema de Céa (véase el capítulo 3).

En [98], J. Xu proporcionó una técnica para realizar el análisis numérico de problemas no lineales sobre dominios acotados cuando no se dispone de ninguna versión del Lema de Céa (cf. también R. Rannacher [79], M. Schultz [84], J. Douglas y T. Dupont [26], C. Johnson y V. Thomée [55]). El método consiste en linealizar la ecuación en derivadas parciales no lineal en una solución aislada dada (véase la hipótesis (5.8)), y considerar su discretización por el método de elementos finitos. En este capítulo, probamos que esta técnica puede extenderse directamente para problemas exteriores no lineales sin utilizar funciones de Green discretas, a costa de algunas restricciones en el tipo de no linealidad. No podemos tratar el caso general porque no disponemos de cotas para las funciones de Green discretas asociadas a formulaciones BEM-FEM.

Los resultados principales de este capítulo son las contribuciones al análisis de una formulación BEM-FEM no lineal completamente discreta. Debemos resolver dos dificultades. Por una parte, salvo que el operador no lineal sea fuertemente monótono y Lipschitz-continuo, no se satisface el Lema de Strang y no disponemos de ninguna

herramienta para controlar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Por otra parte, el núcleo del operador de simple capa es débilmente singular y debemos ser cuidadosos al emplear fórmulas de cuadratura. Presentamos una versión modificada del método simétrico que permite evitar estas singularidades y calcular los coeficientes de la matriz global correspondientes a términos de contorno mediante fórmulas de cuadratura sencillas. Además, probamos que el método descrito por J. Xu [98] puede completarse, al menos para nuestro problema modelo, para estudiar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Esta cuestión permanecía abierta incluso en el caso acotado y sigue sin resolverse para una ecuación no lineal general. Finalmente, estudiamos la formulación variacional que se obtiene al tomar como frontera de acoplamiento una circunferencia.

El contenido de este capítulo está recogido en S. Meddahi et al. [70].

5.1. El problema modelo

A lo largo de este capítulo, Ω_0 es un dominio acotado en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ_0 es de Lipschitz. Consideramos una curva cerrada simple, Γ_1 , que contiene el dominio $\overline{\Omega}_0$ en su interior. Denotamos por Ω_{NL} la región limitada por las curvas Γ_0 y Γ_1 . El complementario de $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_{NL}$ en \mathbb{R}^2 se denota Ω_L . El vector unitario normal a Γ_1 , orientado de Ω_{NL} a Ω_L se designa por \mathbf{n}_1 , y el límite o la traza sobre Γ_1 de una función v definida en Ω_{NL} (Ω_L , resp.) se denota v_{NL} (v_L , resp.).

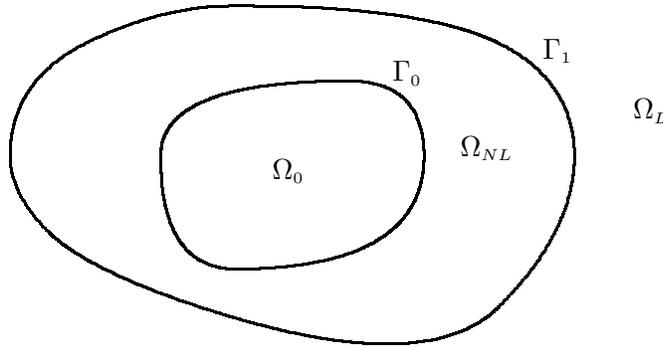


Figura 5.1: Dominio del problema modelo

Sean $b_i(\mathbf{x}, s)$ ($i = 0, 1, 2$) tres funciones reales no lineales de clase $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R})$

tales que las derivadas $\frac{\partial^2 b_i}{\partial s^2}$ son continuas. Deseamos calcular la solución del problema

$$\begin{aligned}
-\Delta u &= 0 && \text{en } \Omega_L \\
-\nabla \cdot (\nabla u + \mathbf{b}(\mathbf{x}, u)) + b_0(\mathbf{x}, u) &= 0 && \text{en } \Omega_{NL} \\
u_{NL} &= u_L \\
\frac{\partial u_{NL}}{\partial \mathbf{n}_1} + \mathbf{b}(\cdot, u_{NL}) \cdot \mathbf{n}_1 &= \frac{\partial u_L}{\partial \mathbf{n}_1} \\
u &= 0 && \text{sobre } \Gamma_0 \\
u(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{5.1}$$

donde denotamos $\mathbf{b} := (b_1, b_2)^\top$.

En el libro de G.N. Gatica y G.C. Hsiao [36] se dan algunos resultados de existencia y unicidad para este tipo de problemas bajo condiciones generales sobre los coeficientes b_i . Las condiciones que imponemos para obtener estimaciones del error son independientes de aquellas que se suponen para deducir existencia y unicidad del problema (5.1). Por esta razón, no vamos a ocuparnos de este punto. Supondremos que el problema (5.1) tiene al menos una solución u , suficientemente regular, y daremos estimaciones del error para una solución aproximada obtenida a partir de un esquema discreto BEM–FEM.

Consideramos una curva cerrada simple Γ que contiene en su interior el conjunto $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_{NL}$. La curva Γ divide el dominio Ω_L en dos regiones: una acotada, que denotamos Ω^- , y la región no acotada exterior a Γ , que denotamos Ω^+ (véase la figura 5.2). Designamos por $\Omega := \Omega_{NL} \cup \Gamma_1 \cup \Omega^-$ y definimos el espacio

$$V := \{v \in H^1(\Omega) ; v|_{\Gamma_0} = 0\} \tag{5.2}$$

Entonces, el problema (5.1) es equivalente a un problema de transmisión.

En lo que sigue, suponemos que $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $0 < \sigma < 1$. No se puede esperar que la solución sea más regular ($\sigma = 1$) porque su derivada normal tiene un salto a través de Γ_1 . Sin embargo, en virtud del Teorema de inclusión de Sobolev, las funciones de $H^{1+\sigma}(\Omega)$ se identifican con funciones continuas en $\overline{\Omega}$. Por tanto, la forma

$$a(u, v) := \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{NL}} \mathbf{b}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{NL}} b_0(\mathbf{x}, u) v \, d\mathbf{x} \tag{5.3}$$

está bien definida para cada $v \in H^1(\Omega)$. Así, se tiene que u satisface en Ω la formulación variacional siguiente:

$$a(u, v) - \int_{\Gamma} \frac{\partial u^-}{\partial \mathbf{n}} v^- \, d\sigma = 0 \quad \forall v \in V \tag{5.4}$$

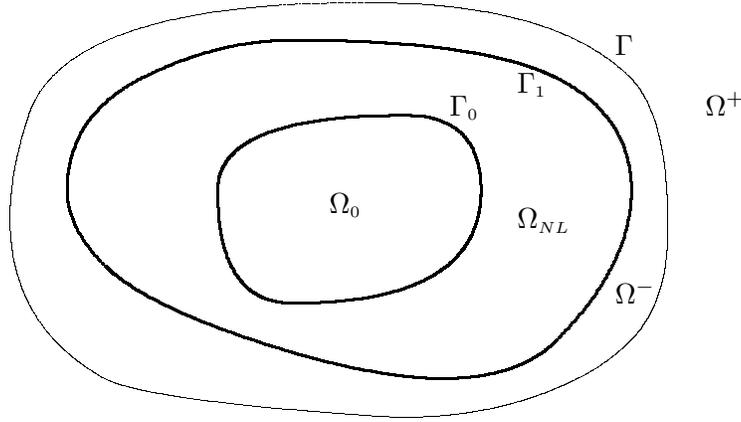


Figura 5.2: Dominio del problema de transmisión

donde \mathbf{n} es el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω a Ω^+ .

El método simétrico de acoplamiento entre elementos finitos y elementos de contorno consiste en resolver la ecuación (5.4) acoplada con dos identidades integrales sobre Γ que relacionan la traza de u con su derivada normal (en este caso, las ecuaciones (1.4) y (1.5)). En lo que sigue, suponemos que Γ es una curva de clase C^∞ . Procediendo como en el capítulo 2, llegamos a la siguiente formulación débil del problema (5.1):

$$\begin{aligned} \text{hallar } u \in V \text{ y } \xi \in H_0^{-1/2} \text{ tales que} \\ a(u, v) + d(u, v) - c(v, \xi) &= 0 \quad \forall v \in V \\ c(u, \eta) + b(\xi, \eta) &= 0 \quad \forall \eta \in H_0^{-1/2} \end{aligned} \quad (5.5)$$

donde las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$ y $d(\cdot, \cdot)$ están dadas por (2.9) y la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$, por (2.10). La incógnita auxiliar ξ está relacionada con la derivada normal de u sobre Γ mediante la expresión:

$$\xi := |\mathbf{x}'| \left(\frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} \circ \mathbf{x} \right)$$

Sea $M := V \times H_0^{-1/2}$. Para simplificar la notación, denotamos \hat{u} , \hat{v} y \hat{w} los elementos (u, ξ) , (v, η) y (w, ζ) de M . Consideramos la forma

$$A(\hat{u}, \hat{v}) := a(u, v) + B(\hat{u}, \hat{v})$$

donde $B(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal dada por (2.12). Con estas notaciones, el problema (5.5) es equivalente a

$$\begin{aligned} & \text{hallar } \hat{u} \in M \text{ tal que} \\ & A(\hat{u}, \hat{v}) = 0 \quad \forall \hat{v} \in M \end{aligned} \tag{5.6}$$

Sea $A'_u : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal definida por

$$\begin{aligned} A'_u(\hat{v}, \hat{w}) & := \int_{\Omega_{NL}} \frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s}(\mathbf{x}, u) \cdot \nabla w v \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega_{NL}} \frac{\partial b_0}{\partial s}(\mathbf{x}, u) v w \, d\mathbf{x} \\ & + \int_{\Omega} \nabla v \cdot \nabla w \, d\mathbf{x} + B(\hat{v}, \hat{w}) \end{aligned}$$

donde denotamos $\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial s} := (\frac{\partial b_1}{\partial s}, \frac{\partial b_2}{\partial s})^\top$. Notamos que $A'_u(\hat{v}, \hat{w})$ es la derivada de Gâteaux de $A(\cdot, \hat{w})$ en el punto \hat{u} y en la dirección \hat{v} . La forma bilineal $A'_u(\cdot, \cdot)$ es continua en $M \times M$ ya que las funciones $\frac{\partial b_i}{\partial s}(\cdot, u(\cdot))$ ($i = 0, 1, 2$) son continuas en $\overline{\Omega}_{NL}$. Por tanto, podemos considerar el operador asociado $\mathcal{A} : M \rightarrow M'$ definido por

$$\langle \mathcal{A}\hat{v}, \hat{w} \rangle = A'_u(\hat{v}, \hat{w}) \quad \forall \hat{v}, \hat{w} \in M$$

donde M' es el dual de M con respecto al producto escalar de $L^2(\Omega) \times H^0$ y denotamos por $\langle \cdot, \cdot \rangle$ el producto de dualidad entre M' y M .

En virtud del Lema 1.10, para cierta constante $k \geq 0$, suficientemente grande, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\langle \mathcal{A}\hat{v}, \hat{v} \rangle + k\|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha\|\hat{v}\|_M^2 \quad \forall \hat{v} \in M \tag{5.7}$$

En lo que sigue, suponemos que el operador \mathcal{A} es *inyectivo*, esto es,

$$A'_u(\hat{v}, \hat{w}) = 0 \quad \forall \hat{w} \in M \Rightarrow \hat{v} = \hat{0} \tag{5.8}$$

Como la inclusión de V en $L^2(\Omega)$ es compacta, también lo es la inclusión canónica $i : V \hookrightarrow V'$. Por tanto, el operador $\mathcal{I} : M \rightarrow M'$ dado por $\mathcal{I}\hat{v} = (i(v), 0)$ es compacto. Como $\|v\|_{0,\Omega}^2 = \langle \mathcal{I}\hat{v}, \hat{v} \rangle$, bajo la hipótesis (5.8), en virtud de la desigualdad (5.7) y el Teorema de Alternativa de Fredholm, \mathcal{A} es un isomorfismo.

5.2. El problema discreto

Por simplicidad en la exposición, en lo que sigue suponemos que las curvas Γ_0 y Γ_1 son poligonales. Discretizamos el problema del mismo modo que en la sección 3.3. Así, el problema discreto asociado al problema (5.6) consiste en

$$\begin{aligned} & \text{hallar } \hat{u}_h \in M_h \text{ tal que} \\ & A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \tag{5.9}$$

Nota. Suponemos que la familia de triangulaciones $(\tau_h)_h$ es cuasi-uniforme. En estas condiciones, se verifica la desigualdad inversa

$$\|w_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq C \sqrt{\log \frac{1}{h}} \|w_h\|_{1,\Omega} \quad \forall w_h \in V_h \quad (5.10)$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h (cf. el Teorema 3.4 de J. Xu [97]).

Teniendo en cuenta los Lemas 3.5 y 2.5, y la densidad de las funciones regulares en M , deducimos que

$$\lim_{h \rightarrow 0^+} \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \|\hat{v} - \hat{v}_h\|_M = 0 \quad \forall \hat{v} \in M \quad (5.11)$$

En estas condiciones, en virtud del Teorema 10.1.2 de C. Chen y J. Zhou [15], existe $h_0 \in (0, 1]$ y una constante $\alpha > 0$ tales que

$$\sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{A'_u(\hat{v}_h, \hat{w}_h)}{\|\hat{w}_h\|_M} \geq \alpha \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \quad \forall h < h_0 \quad (5.12)$$

Además, el operador $\widehat{P}_h: M \rightarrow M_h$ dado, para cada $\hat{v} \in M$, por la solución del problema

$$A'_u(\widehat{P}_h \hat{v}, \hat{w}_h) = A'_u(\hat{v}, \hat{w}_h) \quad \forall \hat{w}_h \in M_h$$

está bien definido si $h < h_0$, y se verifica que

$$\|\hat{v} - \widehat{P}_h \hat{v}\|_M \leq C \inf_{\hat{v}_h \in M_h} \|\hat{v} - \hat{v}_h\|_M$$

donde C es una constante independiente de \hat{v} y de h .

Empleando los Lemas 3.5 y 2.5, deducimos que si $\hat{v} \in M \cap (H^{1+\sigma}(\Omega) \times H^{-1/2+\sigma})$, existe una constante $C > 0$, independiente de h y de \hat{v} , tal que

$$\|\hat{v} - \widehat{P}_h \hat{v}\|_M \leq Ch^\sigma \left(\|v\|_{1+\sigma,\Omega}^2 + \|\eta\|_{-1/2+\sigma}^2 \right)^{1/2} \quad \forall h < h_0 \quad (5.13)$$

Sea $u \in H^1(\Omega)$. Definimos la forma semilineal $R_u: V_h \times V_h \rightarrow \mathbb{R}$ por:

$$R_u(v_h, w_h) := \int_{\Omega_{NL}} \left(\int_0^1 \sum_{i=0}^2 \frac{\partial^2 b_i}{\partial s^2}(\mathbf{x}, \theta(t)) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} (1-t) dt \right) (u - v_h)^2 dx$$

donde $\theta(t) := u + t(v_h - u)$ y denotamos $\frac{\partial w_h}{\partial x_0} \equiv w_h$. El siguiente resultado será útil más adelante.

Lema 5.1. Sea $B_h(\delta) := \{\hat{v}_h \in M_h ; \|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq \delta\}$, donde $\delta > 0$ es una constante. Entonces existe una constante $C > 0$ tal que

$$|R_u(v_h, w_h)| \leq C \|u - v_h\|_{1,\Omega}^2 \|w_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \hat{v}_h \in B_h(\delta) \quad \forall w_h \in V_h$$

Prueba. Para cada $t \in [0, 1]$ y cada $\hat{v}_h \in B_h(\delta)$, se verifica que

$$\|u + t(v_h - u)\|_{0,\infty,\Omega} \leq \delta + \|u\|_{0,\infty,\Omega}$$

Aplicando la desigualdad de Cauchy-Schwarz, deducimos que

$$|R_u(v_h, w_h)| \leq C \|u - v_h\|_{L^4(\Omega)}^2 \|w_h\|_{1,\Omega} \quad \forall \hat{v}_h \in B_h(\delta) \quad \forall w_h \in V_h$$

donde

$$C \geq \max_{i=0,1,2} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{NL} \\ |s| \leq \delta^*}} \left| \frac{\partial^2 b_i}{\partial s^2}(\mathbf{x}, s) \right|$$

El resultado se sigue aplicando que la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ es continua. ■

Probaremos la existencia de solución del problema discreto (5.9) mediante una técnica de punto fijo. Para ello, es útil la siguiente caracterización de las soluciones.

Proposición 5.2. Una función $\hat{u}_h \in M_h$ es una solución del problema (5.9) si y solo si satisface la relación siguiente:

$$A'_u(\hat{u} - \hat{u}_h, \hat{v}_h) = R_u(u_h, v_h) \quad \forall \hat{v}_h \in M_h$$

Prueba. Sea $\eta(t) := A(\hat{u} + t(\hat{u}_h - \hat{u}), \hat{v}_h)$. El resultado se sigue de la identidad

$$\eta(1) = \eta(0) + \eta'(0) + \int_0^1 \eta''(t)(1-t) dt$$

y el hecho de que $\hat{u}_h \in M_h$ es una solución del problema (5.9) si y solo si $A(\hat{u}, \hat{v}_h) = A(\hat{u}_h, \hat{v}_h)$, para cualquier $\hat{v}_h \in M_h$. ■

Consideramos ahora la aplicación $\Psi: M_h \rightarrow M_h$ tal que $\Psi\hat{v}_h$ es la única solución de la ecuación

$$A'_u(\Psi\hat{v}_h, \hat{w}_h) = A'_u(\hat{u}, \hat{w}_h) - R_u(v_h, w_h) \quad \forall \hat{w}_h \in M_h$$

Nótese que en virtud de la Proposición 5.2, los puntos fijos de la aplicación Ψ son las soluciones del problema discreto (5.9).

Observación. La aplicación $\Psi: M_h \rightarrow M_h$ es continua. En efecto, sea $(\hat{v}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de funciones en M_h que converge a un elemento \hat{v}_h en M . De la definición de Ψ , se sigue la identidad

$$A'_u(\Psi\hat{v}_h - \Psi\hat{v}_n, \hat{w}_h) = R_u(v_n, w_h) - R_u(v_h, w_h) \quad \forall \hat{w}_h \in M_h$$

Entonces, empleando la condición inf-sup (5.12), tenemos la estimación

$$\|\Psi\hat{v}_h - \Psi\hat{v}_n\|_M \leq C \sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{|R_u(v_n, w_h) - R_u(v_h, w_h)|}{\|\hat{w}_h\|_M}$$

Es fácil comprobar que el límite del segundo miembro es cero. Luego $\Psi: M_h \rightarrow M_h$ es continua. \diamond

Lema 5.3. Sea $B_h := \{\hat{v}_h \in M_h; \|\hat{v}_h - \hat{P}_h \hat{u}\|_M \leq h^\sigma\}$. Se verifica que $B_h \subset B_h(\delta)$, para $\delta = 1 + \|u\|_{0,\infty,\Omega}$ y $h \leq h_0$.

Prueba. Sea $\hat{v}_h \in B_h$. Usando la desigualdad triangular, tenemos que

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{0,\infty,\Omega} &\leq \|u\|_{0,\infty,\Omega} + \|u - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \\ &\leq \|u\|_{0,\infty,\Omega} + \|u - P_h u\|_{0,\infty,\Omega} + \|P_h u - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \end{aligned}$$

Sea $I_h: \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \rightarrow V_h$ el operador de interpolación de Lagrange asociado a la triangulación τ_h . Entonces,

$$\|u - P_h u\|_{0,\infty,\Omega} \leq \|u - I_h u\|_{0,\infty,\Omega} + \|I_h u - P_h u\|_{0,\infty,\Omega}$$

Empleando la desigualdad inversa (5.10) y teniendo en cuenta que $v_h \in B_h$, deducimos que

$$\|P_h u - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch^\sigma \sqrt{\log \frac{1}{h}}$$

y

$$\|I_h u - P_h u\|_{0,\infty,\Omega} \leq C \sqrt{\log \frac{1}{h}} (\|u - P_h u\|_{1,\Omega} + \|u - I_h u\|_{1,\Omega})$$

En virtud del Lema 3.5, la estimación (5.13) y un Teorema de traza, se tiene que

$$\|I_h u - P_h u\|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch^\sigma \sqrt{\log \frac{1}{h}} \|u\|_{1+\sigma,\Omega}$$

Por otra parte, la siguiente estimación del error de interpolación se obtiene procediendo como en el Lema 3.5:

$$\|u - I_h u\|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch^\sigma \|u\|_{1+\sigma,\Omega}$$

Luego, para h suficientemente pequeño, $\hat{v}_h \in B_h(\delta)$, con $\delta = 1 + \|u\|_{0,\infty,\Omega}$. \blacksquare

A continuación probamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 5.4. *Sea $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0, 1)$, una solución del problema (5.5) y supongamos que la forma bilineal $A'_u(\cdot, \cdot)$ satisface la hipótesis (5.8). Entonces existe $h_0 \in (0, 1]$ tal que el problema discreto (5.9) tiene una solución $\hat{u}_h \in M_h$ que satisface la estimación*

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq Ch^\sigma$$

para cierta constante $C > 0$ y para cada $h \leq h_0$.

Prueba. Veamos que $\Psi: B_h \rightarrow B_h$, esto es,

$$\|\Psi\hat{v}_h - \hat{P}_h\hat{u}\|_M \leq h^\sigma \quad \forall \hat{v}_h \in B_h$$

En efecto, de la definición del operador \hat{P}_h , resulta

$$A'_u(\Psi\hat{v}_h - \hat{P}_h\hat{u}, \hat{w}_h) = -R_u(v_h, w_h) \quad \forall \hat{w}_h \in M_h$$

Así, en virtud de la condición inf-sup (5.12) y del Lema 5.1, deducimos que

$$\|\Psi\hat{v}_h - \hat{P}_h\hat{u}\|_M \leq C \sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{|R_u(v_h, w_h)|}{\|\hat{w}_h\|_M} \leq C \|u - v_h\|_{1,\Omega}^2$$

Usando la desigualdad triangular, la estimación (5.13) y un Teorema de traza, y teniendo en cuenta que $v_h \in B_h$, se tiene que

$$\begin{aligned} \|\Psi\hat{v}_h - \hat{P}_h\hat{u}\|_M &\leq C(\|u - P_h u\|_{1,\Omega}^2 + \|P_h u - v_h\|_{1,\Omega}^2) \\ &\leq Ch^{2\sigma}(1 + \|u\|_{1+\sigma,\Omega}^2) \leq h^\sigma \end{aligned}$$

si h es suficientemente pequeño. Luego $\Psi\hat{v}_h \in B_h$.

La existencia de una solución del problema discreto (5.9) es una consecuencia del Teorema del punto fijo de Brouwer y de la Proposición 5.2. Finalmente, usando la estimación (5.13) y teniendo en cuenta que $\hat{u}_h \in B_h$, tenemos que

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq \|\hat{u} - \hat{P}_h\hat{u}\|_M + \|\hat{P}_h\hat{u} - \hat{u}_h\|_M \leq Ch^\sigma$$

■

Empleando la misma técnica que J. Xu [98], se puede probar el siguiente resultado de unicidad local para el problema (5.9).

Teorema 5.5. *Se puede encontrar una constante $\eta > 0$ de modo que existe una única solución \hat{u}_h del problema (5.9) verificando*

$$\|u - u_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq \eta$$

Prueba. Sean \hat{u}_h^1 y \hat{u}_h^2 dos soluciones del problema (5.9) verificando

$$\|u - u_h^1\|_{0,\infty,\Omega} \leq \eta \quad \text{y} \quad \|u - u_h^2\|_{0,\infty,\Omega} \leq \eta$$

Entonces, si denotamos por $\theta(t) := u_h^1 + t(u_h^2 - u_h^1)$, se tiene que

$$\int_0^1 A'_{\theta(t)}(\hat{u}_h^2 - \hat{u}_h^1, \hat{w}_h) dt = A(\hat{u}_h^2, \hat{w}_h) - A(\hat{u}_h^1, \hat{w}_h) = 0 \quad \forall \hat{w}_h \in M_h \quad (5.14)$$

Por otra parte, usando el Teorema del Valor Medio, podemos escribir:

$$\begin{aligned} \int_0^1 A'_{\theta(t)}(v_h, w_h) dt &= \int_0^1 A'_u(v_h, w_h) dt \\ &= \int_0^1 \int_{\Omega_{NL}} \sum_{i=0}^2 \frac{\partial^2 b_i}{\partial s^2}(\mathbf{x}, u + \delta(\theta(t) - u))(\theta(t) - u) \frac{\partial w_h}{\partial x_i} v_h d\mathbf{x} \end{aligned}$$

para cierto $\delta \in (0, 1)$. Como $\|\theta(t) - u\|_{0,\infty,\Omega} \leq 3\eta \quad \forall t \in [0, 1]$, deducimos que

$$\int_0^1 A'_{\theta(t)}(v_h, w_h) dt \geq A'_u(v_h, w_h) - C\eta \|\hat{w}_h\|_M \|\hat{v}_h\|_M$$

Luego, en virtud de (5.12), para η suficientemente pequeño se tiene que

$$\sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{\int_0^1 A'_{\theta(t)}(\hat{v}_h, \hat{w}_h) dt}{\|\hat{w}_h\|_M} \geq C \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{v}_h \in M_h$$

Empleando esta relación en la desigualdad (5.14), obtenemos que $\hat{u}_h^1 = \hat{u}_h^2$. ■

5.3. Un esquema completamente discreto

En la práctica, la aplicación del método requiere el uso de fórmulas de cuadratura para calcular los coeficientes del sistema (5.9). En esta sección proponemos un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de cuadratura. Extendemos las técnicas empleadas para analizar el problema discreto (5.9) a este caso, probando que el orden de convergencia es el mismo.

Aproximamos la forma $a(\cdot, \cdot)$ usando la fórmula de cuadratura Q_T definida en (2.25) en cada triángulo $T \in \tau_h$. Así, definimos la forma aproximada

$$a_h(u_h, v_h) := \sum_{T \in \tau_h} Q_T(\nabla u_h \cdot \nabla v_h) + \sum_{T \in \tau_{h,NL}} Q_T \left(\sum_{i=0}^2 b_i(\mathbf{x}, u_h) \frac{\partial v_h}{\partial x_i} \right) \quad (5.15)$$

Sea $A_h: M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ la forma definida por

$$A_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) := a_h(u_h, v_h) + B_h(\hat{u}_h, \hat{v}_h) \quad \forall \hat{u}_h, \hat{v}_h \in M_h$$

donde $B_h(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal dada en (2.35). Resolvemos el problema modificado

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{u}_h^* \in M_h \text{ tal que} \\ &A_h(\hat{u}_h^*, \hat{v}_h) = 0 \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \end{aligned} \tag{5.16}$$

A continuación, probamos que este problema tiene una solución y que se conserva el orden de convergencia.

Lema 5.6. *Sea $B_h^* := \{\hat{v}_h \in M_h ; \|\hat{v}_h - \hat{u}_h\|_M \leq h^\sigma\}$, donde $\hat{u}_h \in B_h$ es una solución del problema (5.9). Para h suficientemente pequeño, se verifica que*

$$B_h^* \subset B_h(\delta^*) \quad \delta^* := 2 + \|u\|_{0,\infty,\Omega}$$

Prueba. Sea $\hat{v}_h \in B_h^*$. En virtud de la desigualdad triangular y el Lema 5.3, tenemos que

$$\begin{aligned} \|v_h\|_{0,\infty,\Omega} &\leq \|u_h\|_{0,\infty,\Omega} + \|u_h - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \\ &\leq 1 + \|u\|_{0,\infty,\Omega} + \|u_h - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \end{aligned}$$

Usando la desigualdad inversa (5.10) y teniendo en cuenta que $\hat{v}_h \in B_h^*$, obtenemos

$$\|u_h - v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq Ch^\sigma \sqrt{\log \frac{1}{h}}$$

de modo que para h suficientemente pequeño,

$$\|v_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq 2 + \|u\|_{0,\infty,\Omega}$$

■

Proposición 5.7. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que para cada $\hat{v}_h \in B_h^*$ y $\hat{w}_h \in M_h$,*

$$|A(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A_h(\hat{v}_h, \hat{w}_h)| \leq Ch(1 + \|\hat{v}_h\|_M) \|\hat{w}_h\|_M$$

Prueba. Sean $\hat{v}_h \in B_h^*$ y $\hat{w}_h \in M_h$. En virtud de la Proposición 2.9, solo tenemos que probar que para cada $T \in \tau_{h,NL}$, existe una constante $C > 0$, independiente de h y de T , tal que

$$\sum_{j=0}^2 |I_j| \leq Ch(1 + \|v_h\|_{1,T}) \|w_h\|_{1,T}$$

donde para $j = 0, 1, 2$,

$$I_j := \int_T b_j(\mathbf{x}, v_h) \frac{\partial w_h}{\partial x_j} d\mathbf{x} - Q_T \left(b_j(\mathbf{x}, v_h) \frac{\partial w_h}{\partial x_j} \right)$$

(otra vez, denotamos $\frac{\partial w_h}{\partial x_0} \equiv w_h$).

Sea $T \in \tau_{h,NL}$. Usando las ideas de M. Feistauer [28], escribimos

$$\begin{aligned} \|b_i(\cdot, v_h)\|_{1,\infty,T} &\leq \|b_i(\cdot, v_h)\|_{0,\infty,T} \\ &\quad + \sum_{j=1}^2 \left(\left\| \frac{\partial b_i}{\partial x_j}(\cdot, v_h) \right\|_{0,\infty,T} + \left\| \frac{\partial b_i}{\partial s}(\cdot, v_h) \right\|_{0,\infty,T} \left| \frac{\partial v}{\partial x_j} \right|_T \right) \end{aligned}$$

Como las funciones $b_i \in C^1(\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R})$ ($i = 0, 1, 2$) y $\hat{v}_h \in B_h^*$, resulta que

$$\|b_i(\cdot, v_h)\|_{1,\infty,T} \leq C(1 + |\nabla v_h|_T)$$

donde

$$C \geq \max_{i=0,1,2} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL} \\ |s| \leq \delta^*}} \left| \frac{\partial b_i}{\partial s}(\mathbf{x}, s) \right|$$

El resultado se deduce aplicando el Lema 2.7 con $f = b_i(\cdot, v_h)|_T$ y $p \equiv 1$ si $i = 1, 2$, y con $f = b_0(\cdot, v_h)|_T$ y $p = w_h|_T$ cuando $i = 0$. ■

Seguidamente, caracterizamos las soluciones del problema (5.16).

Proposición 5.8. *Una función $\hat{u}_h^* \in M_h$ es solución del problema (5.16) si y solo si para cada $\hat{w}_h \in M_h$ se cumple que*

$$A'_{u_h}(\hat{u}_h^* - \hat{u}_h, \hat{w}_h) = A(\hat{u}_h^*, \hat{w}_h) - A_h(\hat{u}_h^*, \hat{w}_h) - R_{u_h}(u_h^*, w_h)$$

Prueba. Sea $\eta_h(t) := A(\hat{u}_h + t(\hat{u}_h^* - \hat{u}_h), \hat{v}_h)$. El resultado es una consecuencia de la identidad

$$\eta_h(1) = \eta_h(0) + \eta_h'(0) + \int_0^1 \eta_h''(t)(1-t) dt$$

y el hecho de que $\hat{u}_h^* \in M_h$ es una solución del problema (5.16) si y solo si $A(\hat{u}_h, \hat{v}_h) = A_h(\hat{u}_h^*, \hat{v}_h) \forall \hat{v}_h \in M_h$. ■

Teorema 5.9. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.4, existe $h_1 \in (0, 1]$ tal que para cada $h < h_1$, el problema (5.16) tiene una solución $\hat{u}_h^* \in M_h$ que verifica*

$$\|\hat{u} - \hat{u}_h^*\|_M \leq Ch^\sigma$$

Prueba. Dada $\hat{v}_h \in B_h^*$, usando la desigualdad triangular, obtenemos que

$$\|u_h + t(v_h - u_h)\|_{0,\infty,\Omega} \leq 2 + \|u\|_{0,\infty,\Omega} \quad \forall t \in [0, 1]$$

En virtud de los Lemas 5.6 y 5.1, existe una constante $C > 0$ tal que para cualesquiera $\hat{v}_h \in B_h^*$ y $\hat{w}_h \in M_h$,

$$|R_{u_h}(v_h, w_h)| \leq C \|u_h - v_h\|_{1,\Omega}^2 \|\hat{w}_h\|_M \quad (5.17)$$

Definimos la aplicación no lineal $\Psi^*: M_h \rightarrow M_h$ por

$$A'_{u_h}(\Psi^* \hat{v}_h, \hat{w}_h) = A'_{u_h}(\hat{u}_h, \hat{w}_h) + A(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A_h(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - R_{u_h}(v_h, w_h)$$

Los puntos fijos de la aplicación $\Psi^*: M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ son las soluciones del problema (5.16). Además, la forma bilineal $A'_{u_h}: M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ satisface la condición inf-sup

$$\sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{A'_{u_h}(\hat{v}_h, \hat{w}_h)}{\|\hat{w}_h\|_M} \geq C \|\hat{v}_h\|_M \quad \forall \hat{v}_h \in M_h \quad (5.18)$$

para cierta constante $C > 0$ y para h suficientemente pequeño, lo que garantiza que $\Psi^*: M_h \times M_h \rightarrow \mathbb{R}$ es continua. En efecto,

$$|A'_u(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A'_{u_h}(\hat{v}_h, \hat{w}_h)| \leq C \|u - u_h\|_{L^4(\Omega)} \|v_h\|_{L^4(\Omega)} \|w_h\|_{1,\Omega}$$

donde

$$C \geq \max_{i=0,1,2} \sup_{\substack{\mathbf{x} \in \bar{\Omega}_{NL} \\ |s| \leq \delta^*}} \left| \frac{\partial^2 b_i}{\partial s^2}(\mathbf{x}, s) \right|$$

Pero como la inclusión $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^4(\Omega)$ es continua, queda que

$$|A'_u(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A'_{u_h}(\hat{v}_h, \hat{w}_h)| \leq C \|u - u_h\|_{1,\Omega} \|v_h\|_{1,\Omega} \|w_h\|_{1,\Omega}$$

Ahora, en virtud del Teorema 5.4, para h suficientemente pequeño

$$|A'_u(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A'_{u_h}(\hat{v}_h, \hat{w}_h)| \leq Ch^\sigma \|v_h\|_{1,\Omega} \|w_h\|_{1,\Omega}$$

de donde se sigue la desigualdad (5.18).

Veamos ahora que para cada $\hat{v}_h \in B_h^*$, se verifica que $\Psi^* \hat{v}_h \in B_h^*$. Dada $\hat{v}_h \in B_h^*$, de la condición inf-sup (5.18), la definición de Ψ^* y la desigualdad (5.17), se sigue que

$$\|\Psi^* \hat{v}_h - \hat{u}_h\|_M \leq C \sup_{\hat{w}_h \in M_h} \frac{|A(\hat{v}_h, \hat{w}_h) - A_h(\hat{v}_h, \hat{w}_h)|}{\|\hat{w}_h\|_M} + C_1 \|v_h - u_h\|_{1,\Omega}^2$$

Luego, por la Proposición 5.7, teniendo en cuenta que $v_h \in B_h^*$,

$$\|\Psi^* \hat{v}_h - \hat{u}_h\|_M \leq C \{(1 + \|\hat{v}_h\|_M) h^{1-\sigma} + h^\sigma\} h^\sigma < h^\sigma$$

para h suficientemente pequeño, ya que $\|\hat{v}_h\|_M$ está acotado independientemente de h . El resultado es una consecuencia del Teorema del punto fijo de Brouwer y de la Proposición 5.8. \blacksquare

5.4. El caso de una frontera auxiliar circular

En esta sección, presentamos una formulación variacional simplificada que puede ser útil en la práctica. Si tomamos como frontera de acoplamiento una circunferencia y usamos las mismas técnicas que en la sección 3.6, obtenemos una formulación variacional más sencilla en la que solo interviene una incógnita. Discretizamos el problema usando una triangulación exacta del dominio y llegamos a un esquema discreto para el que no se dispone de ninguna versión del Lema de Céa. Empleando las mismas técnicas que en la sección 5.2, deducimos estimaciones del error. También estudiamos el efecto de la integración numérica sobre la convergencia. Por último, presentamos resultados de las experiencias numéricas realizadas.

5.4.1. La formulación variacional

En lo que sigue, Γ es la circunferencia de centro el origen y de radio R (véase la figura 3.3). Entonces, combinando la formulación variacional del problema en el dominio acotado (5.4) con la expresión (2.48), deducimos la siguiente formulación variacional del problema (5.1):

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u \in V \text{ tal que} \\ &a(u, v) + 2d(u, v) = 0 \quad \forall v \in V \end{aligned} \tag{5.19}$$

donde $a(\cdot, \cdot)$ y $d(\cdot, \cdot)$ están dadas por (5.3) y (2.9), respectivamente, y V es el subespacio de $H^1(\Omega)$ que se define en (5.2).

En lo que sigue, suponemos que el problema (5.19) tiene al menos una solución $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $0 < \sigma < 1$, y damos estimaciones del error para una solución aproximada obtenida a partir de un esquema discreto BEM–FEM. Nótese que en estas condiciones, la forma $a(u, v)$ está bien definida para cada $v \in H^1(\Omega)$.

Denotemos por $A'_u: V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal continua dada por la derivada de Gâteaux de la forma

$$A(v, w) := a(v, w) + 2d(v, w)$$

Consideramos el operador $\mathcal{A}: V \rightarrow V'$ dado por

$$\langle \mathcal{A}v, w \rangle = A'_u(v, w) \quad \forall v, w \in V$$

donde usamos $\langle \cdot, \cdot \rangle$ para denotar el producto de dualidad entre V' y V . En virtud del Lema 1.10, para cierta constante $k \geq 0$, suficientemente grande, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$\langle \mathcal{A}v, v \rangle + k\|v\|_{0,\Omega}^2 \geq \alpha\|v\|_{1,\Omega}^2 \quad \forall v \in V \tag{5.20}$$

Por tanto, si el operador \mathcal{A} es inyectivo, por el Teorema de Alternativa de Fredholm, es un isomorfismo.

5.4.2. El problema discreto

Por simplicidad, en lo que sigue suponemos que las fronteras Γ_0 y Γ_1 son poligonales. Discretizamos el problema de la misma forma que en la sección 3.3, considerando una familia de triangulaciones $(\tau_h)_h$ cuasi-uniforme. El problema discreto asociado al problema (5.19) consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h \in V_h \text{ tal que} \\ &a(u_h, v_h) + 2d(u_h, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{5.21}$$

Procediendo como en la sección 5.2, obtenemos el resultado siguiente.

Teorema 5.10. *Si $u \in H^{1+\sigma}(\Omega)$, con $\sigma \in (0, 1)$, es una solución del problema (5.19) y el operador \mathcal{A} es inyectivo, existe una constante $C > 0$ y $h_0 \in (0, 1]$ tales que el problema discreto (5.21) tiene una solución $u_h \in V_h$ que satisface la estimación*

$$\|u - u_h\|_{1,\Omega} \leq Ch^\sigma \quad \forall h \leq h_0$$

Además, se puede encontrar una constante $\eta > 0$ de modo que existe una única solución u_h del problema (5.21) verificando

$$\|u - u_h\|_{0,\infty,\Omega} \leq \eta$$

5.4.3. El efecto de la integración numérica

En la práctica, para resolver el sistema asociado al problema discreto (5.21), tenemos que emplear fórmulas de cuadratura para calcular de forma aproximada los elementos del sistema. A continuación, presentamos un esquema completamente discreto que tiene en cuenta el uso de fórmulas de integración numérica. Resolvemos el problema modificado:

$$\begin{aligned} &\text{hallar } u_h^* \in V_h \text{ tal que} \\ &a_h(u_h^*, v_h) + 2d_h(u_h^*, v_h) = 0 \quad \forall v_h \in V_h \end{aligned} \tag{5.22}$$

donde la forma $a_h(\cdot, \cdot)$ está dada por (5.15) y $d_h(\cdot, \cdot)$ se define en (2.33).

Extendiendo las técnicas empleadas para analizar el problema discreto (5.21) (ver la sección 5.3), probamos que se conserva el orden de convergencia.

Teorema 5.11. *Bajo las hipótesis del Teorema 5.10, existe $h_1 \in (0, 1]$ tal que para cada $h < h_1$, el problema (5.22) tiene una solución $u_h^* \in V_h$ que verifica*

$$\|u - u_h^*\|_{1,\Omega} \leq Ch^\sigma$$

5.4.4. Experiencias numéricas

El problema (5.22) conduce a un sistema no lineal que resolvemos aplicando el método de Newton, con la variante de Armijo para mejorar la convergencia. En cada iteración del algoritmo, debemos resolver un sistema lineal que tiene la misma estructura que el sistema (2.52).

En concreto, en la iteración n hay que resolver el sistema

$$(\mathbf{A}_n + 2\mathbf{D})\delta^n = \mathbf{b}_n \quad (5.23)$$

Si la matriz \mathbf{A}_n es simétrica y definida positiva, la solución del sistema (5.23) puede calcularse usando el mismo algoritmo que hemos utilizado para resolver el sistema (2.52).

A continuación, presentamos resultados de las experiencias numéricas realizadas para el problema (5.1) cuando $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ y

$$b_0(\mathbf{x}, s) := f(\mathbf{x}) - \frac{s}{\sqrt{1+s^2}} 1_{\Omega_{NL}}(\mathbf{x})$$

siendo $1_{\Omega_{NL}}$ la función indicador del dominio Ω_{NL} . Tomamos $\Omega_0 := [-0,5, 0,5]^2$, $\Omega_{NL} := [-1,5, 1,5]^2 \setminus \overline{\Omega}_0$ y como frontera auxiliar la circunferencia de centro el origen y radio 3. La condición de contorno de tipo Dirichlet sobre Γ_0 y la función f se eligen de modo que la solución exacta es la función $u(x, y) = \frac{x}{x^2+y^2}$.

h	Iteraciones	máx _{i} $ (u - u_h)(\mathbf{a}_i) $
1/18	4	$1,11 \cdot 10^{-1}$
1/36	4	$3,53 \cdot 10^{-2}$
1/72	4	$1,82 \cdot 10^{-2}$
1/144	4	$7,14 \cdot 10^{-3}$

Cuadro 5.1: Convergencia en función del parámetro h

En la Tabla 5.1 se muestran el número de iteraciones y el error en la norma L^∞ discreta para distintos valores del parámetro de discretización h . Notamos que el

método empleado es óptimo en el sentido de que el número de iteraciones no varía al disminuir el paso de discretización h .

Capítulo 6

El sistema de Lamé

En este capítulo consideramos el problema de Dirichlet para las ecuaciones de la elasticidad lineal en el exterior de un dominio plano acotado. Para los problemas considerados en los capítulos precedentes cabe también la posibilidad de extender el método de C. Johnson y J.C. Nédélec [54] puesto que el operador de doble capa asociado al operador de Laplace es compacto. Sin embargo, para resolver el problema que se considera en este capítulo debemos emplear el método simétrico (cf. M. Costabel y E.P. Stephan [24]) debido a que en este caso el operador de doble capa es un valor principal de Cauchy. Otra posibilidad es utilizar la formulación cuasi-simétrica propuesta por G.C. Hsiao [50, 36], que se basa en el método de acoplamiento de J. Bielak y R.C. MacCamy [7].

Generalizamos el método presentado en el capítulo 2 para estudiar el sistema de Lamé en el exterior de un dominio plano acotado. La nueva formulación permite, por una parte, aproximar los coeficientes del sistema a resolver mediante fórmulas de cuadratura elementales y, por otra parte, controlar el efecto de la integración numérica sobre la convergencia.

La estructura de este capítulo es semejante a la del capítulo 2. En la sección 6.1, describimos el problema modelo y probamos que la nueva formulación BEM-FEM tiene una única solución. En la sección 6.2, discretizamos el problema usando una triangulación exacta del dominio acotado y damos estimaciones del error para el método de Galerkin. En la sección 6.3 presentamos un esquema completamente discreto obtenido al aproximar los coeficientes del problema discreto mediante fórmulas de cuadratura elementales. Resolvemos las dificultades que plantea el hecho de que los núcleos de los operadores integrales sean singulares. El análisis de este esquema se lleva a cabo en la sección 6.4, donde probamos que se conserva el orden de convergencia. En la sección 6.5 presentamos una técnica de preconditionamiento

para resolver los sistemas a los que conduce la nueva formulación. Por último, en la sección 6.6 extendemos estas técnicas para resolver un problema elasto-plástico en un dominio plano exterior. Se trata de un problema no lineal con un operador fuertemente monótono y Lipschitz-continuo. Por tanto, el análisis es similar al del problema (3.1).

A lo largo de este capítulo, empleamos las notaciones siguientes. Si H es un espacio de Hilbert, denotamos por $\mathbf{H} := H \times H$ el espacio producto, dotado de la norma producto usual y del correspondiente producto escalar. Usamos la misma notación para el producto escalar y la norma del espacio producto. Utilizamos dos puntos para denotar el producto escalar en el espacio de las matrices reales 2×2 , es decir,

$$\mathbf{A} : \mathbf{B} := \sum_{i,j=1}^2 a_{ij} b_{ij}$$

6.1. El problema modelo

Sea Ω_0 un dominio acotado en \mathbb{R}^2 cuya frontera Γ_0 es de Lipschitz. Dada una función $\mathbf{f} : \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$, de soporte compacto, consideramos el siguiente problema exterior de Dirichlet para el sistema de Lamé: *hallar el campo de desplazamientos* $\mathbf{u} : \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{S}[\mathbf{u}] &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega'_0 \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_0 \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (6.1)$$

donde denotamos por $\mathbf{S}[\mathbf{u}]$ el *tensor de tensiones*. Suponemos que el cuerpo que ocupa la región Ω'_0 es elástico, homogéneo e isótropo. En estas condiciones, el tensor de tensiones está dado por la *ley de Hooke*

$$\mathbf{S}[\mathbf{u}] = \lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} + 2\mu \mathbf{E}[\mathbf{u}]$$

donde $\lambda, \mu > 0$ son las constantes de Lamé, \mathbf{I} es el tensor unidad y

$$\mathbf{E}[\mathbf{u}] := \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^\top)$$

es el *tensor de deformación linealizado*.

Sea Ω un dominio acotado y simplemente conexo en \mathbb{R}^2 que contiene el soporte de la función \mathbf{f} y el dominio $\bar{\Omega}_0$ en su interior. Suponemos que la frontera de Ω , que denotamos Γ , es una curva de clase C^∞ . La curva Γ divide el dominio Ω'_0 en

dos subdominios: $\Omega^- := \Omega \cap \Omega'_0$ y $\Omega^+ := \Omega'$. El límite sobre Γ de una función v definida en Ω^+ (Ω^-) se indica por v^+ (v^- , resp.). Sea \mathbf{n} el vector unitario normal a Γ , orientado de Ω^- a Ω^+ . Denotamos por $\mathbf{t}^\pm[\mathbf{u}] := \mathbf{S}[\mathbf{u}]^\pm \mathbf{n}$ la *tracción* sobre Γ . Entonces, el problema (6.1) se puede reescribir como un problema interior:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{S}[\mathbf{u}] &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega^- \\ \mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_0 \end{aligned} \quad (6.2)$$

acoplado con el problema exterior homogéneo:

$$\begin{aligned} -\nabla \cdot \mathbf{S}[\mathbf{u}] &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega^+ \\ \mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty \end{aligned} \quad (6.3)$$

mediante las condiciones de transmisión

$$\mathbf{u}^- = \mathbf{u}^+ \quad \text{y} \quad \mathbf{t}^-[\mathbf{u}] = \mathbf{t}^+[\mathbf{u}] \quad (6.4)$$

Las condiciones (6.4) se traducen en que el campo de desplazamientos y las tracciones deben de ser continuos sobre Γ .

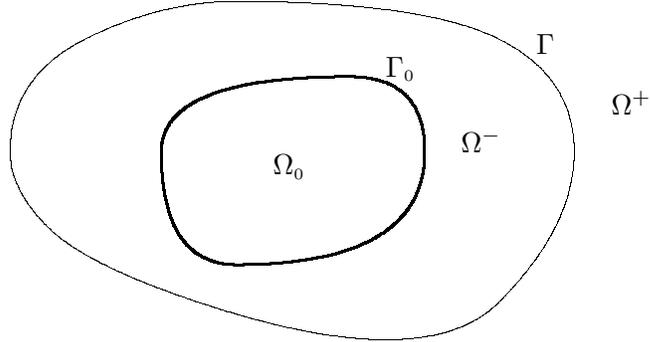


Figura 6.1: Dominio del problema de transmisión

La formulación variacional del problema en el dominio acotado Ω^- se obtiene de la forma habitual: basta multiplicar las dos ecuaciones de (6.2) por funciones test v_i tales que $v_i|_{\Gamma_0} = 0$ ($i = 1, 2$), y aplicar la fórmula de Green en Ω^- . De este modo, si $a: \mathbf{H}^1(\Omega^-) \times \mathbf{H}^1(\Omega^-) \rightarrow \mathbb{R}$ es la forma bilineal dada por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega^-} (\lambda (\nabla \cdot \mathbf{u}) (\nabla \cdot \mathbf{v}) + 2\mu \mathbf{E}[\mathbf{u}] : \mathbf{E}[\mathbf{v}]) \, d\mathbf{x} \quad (6.5)$$

se tiene que

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \int_{\Gamma} \mathbf{t}^{-}[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{v}^{-} d\sigma = (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0, \Omega^{-}} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (6.6)$$

donde \mathbf{V} es el subespacio de $\mathbf{H}^1(\Omega^{-})$ formado por las funciones que se anulan sobre Γ_0 , es decir,

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega^{-}) ; \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}\}$$

La forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ es continua. Además, en virtud de la desigualdad de Korn, $a(\cdot, \cdot)$ es elíptica en \mathbf{V} , es decir, existe una constante $\alpha > 0$ tal que

$$a(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \alpha \|\mathbf{v}\|_{1, \Omega^{-}}^2 \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \quad (6.7)$$

Por otra parte, la solución fundamental del operador de elasticidad lineal está dada por (cf. C. Chen y J. Zhou [15]):

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = -\frac{\lambda + 3\mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mathbf{I} + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu(\lambda + 2\mu)} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\top}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2}$$

En lo que sigue, denotamos por $\mathbf{T}^{\pm}[\mathbf{U}] := (\mathbf{t}^{\pm}[\mathbf{U}^1], \mathbf{t}^{\pm}[\mathbf{U}^2])^{\top}$, siendo \mathbf{U}^i los vectores columna del tensor \mathbf{U} . El resultado siguiente se prueba en C. Chen y J. Zhou [15].

Lema 6.1. *Si \mathbf{u} es solución del problema (6.3), entonces en cada punto $\mathbf{x} \in \Omega^{+}$, se verifica que*

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{\mathbf{y}}^{+}[\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \mathbf{u}^{+}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} - \int_{\Gamma} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{t}^{+}[\mathbf{u}](\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}} + \mathbf{c} \quad (6.8)$$

donde \mathbf{c} es un vector constante que depende de \mathbf{u} . El subíndice \mathbf{y} en el operador \mathbf{T}^{+} indica que derivamos con respecto a la variable \mathbf{y} ; la integración debe entenderse componente a componente.

La fórmula (6.8), conocida como *fórmula de Betti-Somigliana*, permite calcular la solución del problema (6.1) en cualquier punto del dominio exterior Ω^{+} una vez conocidas la traza de \mathbf{u} y su tracción sobre la frontera de acoplamiento Γ .

Para $\mathbf{x} \in \Gamma$, el *potencial de capa simple*

$$\widehat{\mathcal{V}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

tiene una singularidad cuando $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Sin embargo, la integral existe como integral impropia (compárese con (1.3)).

Sea $\boldsymbol{\tau}$ el vector tangente a la curva Γ y denotemos por

$$\tilde{\mathbf{I}} := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Llamamos *potencial de doble capa* al operador definido por

$$\widehat{\mathcal{K}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{\mathbf{y}}^+[\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

A diferencia de los potenciales de doble capa asociados al operador de Laplace o al de Stokes (cf. S. Meddahi y F.J. Sayas [72]), el núcleo de este operador

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{\mathbf{y}}^+[\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] &= \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \left(\frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \mathbf{I} - \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \boldsymbol{\tau}(\mathbf{y})}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \tilde{\mathbf{I}} \right) \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^\top}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^4} (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n}(\mathbf{y}) \end{aligned}$$

tiene una singularidad del tipo $\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}$. Por tanto, el operador de doble capa debe interpretarse como un valor principal de Cauchy. Más adelante daremos una definición precisa de la versión parametrizada de este operador, que es la que utilizamos en nuestra formulación.

Pasando al límite cuando \mathbf{x} se aproxima a Γ en la fórmula de representación (6.8), y teniendo en cuenta las relaciones de salto de los potenciales de simple y doble capa (cf. C. Chen y J. Zhou [15]), se deduce la identidad

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^+ = \widehat{\mathcal{K}}\mathbf{u}^+ - \widehat{\mathcal{V}}\mathbf{t}^+[\mathbf{u}] + \mathbf{c} \quad (6.9)$$

Denotemos por $\widehat{\mathcal{K}}'$ el operador adjunto de $\widehat{\mathcal{K}}$, es decir,

$$\widehat{\mathcal{K}}'\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathbf{T}_{\mathbf{x}}^+[\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})] \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

y sea $\widehat{\mathcal{W}}$ el operador dado por

$$\widehat{\mathcal{W}}\mathbf{g}(\mathbf{x}) := - \int_{\Gamma} (\mathbf{T}_{\mathbf{x}}^+[\mathbf{T}_{\mathbf{y}}^+\mathbf{U}(\mathbf{x}, \mathbf{y})])^\top \mathbf{g}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

Nótese que la integral que define al operador $\widehat{\mathcal{W}}$ es hipersingular. Por tanto, el operador correspondiente se define regularizando la integral divergente mediante el

procedimiento habitual (véase W. Hackbusch [47], C. Chen y J. Zhou [15]). Aplicando el operador \mathbf{S} a la identidad (6.8) y pasando al límite cuando \mathbf{x} se aproxima a Γ , deducimos la identidad (cf. C. Chen y J. Zhou [15])

$$\frac{1}{2} \mathbf{t}^+[\mathbf{u}] = -\widehat{\mathcal{W}}\mathbf{u}^+ - \widehat{\mathcal{K}}'\mathbf{t}^+[\mathbf{u}] \quad (6.10)$$

El método simétrico consiste en resolver la formulación variacional del problema en el dominio interior junto con estas dos ecuaciones integrales sobre la frontera de acoplamiento, que hacen el papel de dos condiciones de contorno no locales.

Al igual que en el caso del laplaciano, el operador hipersingular se puede expresar en términos de un operador que tiene una singularidad de tipo logarítmico (como la del operador de capa simple). En efecto, sea $\widehat{\mathcal{V}}^*$ el operador definido formalmente por

$$\widehat{\mathcal{V}}^*\mathbf{g}(\mathbf{x}) := \int_{\Gamma} \mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y})\mathbf{g}(\mathbf{y}) d\sigma_{\mathbf{y}}$$

donde

$$\mathbf{U}^*(\mathbf{x}, \mathbf{y}) := \frac{\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 2\mu)} \left\{ -\log |\mathbf{x} - \mathbf{y}| \mathbf{I} + \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{y})(\mathbf{x} - \mathbf{y})^{\top}}{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|^2} \right\}$$

J. Gwinner y E.P. Stephan [46] probaron que

$$\widehat{\mathcal{W}}\mathbf{u} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} \widehat{\mathcal{V}}^* \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{\tau}} \mathbf{u} \quad \text{sobre } \Gamma \quad (6.11)$$

A continuación, presentamos una nueva versión del método simétrico para resolver el problema (6.1). Para ello consideramos una representación paramétrica 1-periódica de la curva Γ , $\boldsymbol{x}: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$. En lo que sigue, llamamos *operador de capa simple* al operador $\mathcal{V}: \mathbf{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ definido por

$$\mathcal{V}\boldsymbol{\eta}(s) := \int_0^1 \mathbf{V}(s, t) \boldsymbol{\eta}(t) dt$$

donde $\mathbf{V}(s, t) := \mathbf{U}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}(t))$. Como hemos visto, el núcleo del operador de capa simple presenta una singularidad de tipo logarítmico y, por tanto, la integral se interpreta como una integral impropia. El operador $\mathcal{K}: \mathbf{H}^{1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ definido por

$$\mathcal{K}\boldsymbol{\eta}(s) := \int_0^1 \mathbf{K}(s, t) \boldsymbol{\eta}(t) dt$$

siendo $\mathbf{K}(s, t) = |\boldsymbol{x}'(t)| \mathbf{T}_{\boldsymbol{x}(t)}^+ [\mathbf{U}(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}(t))]$, se llama *operador de doble capa*. De la expresión explícita del núcleo del operador de doble capa, es claro que tiene una

singularidad del tipo $\frac{1}{s-t}$. Por tanto, la integral tiene sentido como un valor principal de Cauchy, es decir,

$$\mathcal{K}\boldsymbol{\eta}(s) := \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \left(\int_0^{s-\varepsilon} \mathbf{K}(s, t) \boldsymbol{\eta}(t) dt + \int_{s+\varepsilon}^1 \mathbf{K}(s, t) \boldsymbol{\eta}(t) dt \right)$$

Nótese que los operadores \mathcal{V} y \mathcal{K} son versiones parametrizadas de los potenciales de simple y doble capa clásicos, respectivamente.

En lo que sigue, denotamos por

$$\boldsymbol{\xi}(t) := |\boldsymbol{x}'(t)| \mathbf{t}^+[\mathbf{u}](\boldsymbol{x}(t))$$

Entonces, introduciendo la parametrización \boldsymbol{x} en la ecuación (6.9) y empleando las condiciones de transmisión (6.4), obtenemos la ecuación integral periódica:

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K} \right) \gamma(\mathbf{u}) + \mathcal{V}\boldsymbol{\xi} - \mathbf{c} = \mathbf{0} \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (6.12)$$

donde $\mathcal{I}: \mathbf{H}^{1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ es el operador identidad y γ se aplica componente a componente. Notamos que, usando la fórmula de representación (6.8), se prueba que el comportamiento de \mathbf{u} en el infinito es equivalente a una condición de media nula de $\mathbf{t}^+[\mathbf{u}]$ sobre Γ . Así, se tiene que

$$\int_0^1 \boldsymbol{\xi}(s) ds = \int_{\Gamma} \mathbf{t}^+[\mathbf{u}] d\sigma = \mathbf{0}$$

A continuación, definimos una versión parametrizada del operador $\widehat{\mathcal{V}}^*$. Denotamos por $\mathcal{V}^*: \mathbf{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ el operador definido por

$$\mathcal{V}^*\boldsymbol{\xi}(s) := \int_0^1 \mathbf{V}^*(s, t) \boldsymbol{\xi}(t) dt$$

donde $\mathbf{V}^*(s, t) := \mathbf{U}^*(\boldsymbol{x}(s), \boldsymbol{x}(t))$.

Lema 6.2. *Se verifica que*

$$\int_{\Gamma} \widehat{\mathcal{W}}\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v}(\mathbf{x}) d\sigma_{\mathbf{x}} = (\gamma(\mathbf{v})', \mathcal{V}^*\gamma(\mathbf{u})')$$

Prueba. El resultado se deduce multiplicando la relación (6.11) por una función \mathbf{v} , integrando por partes y parametrizando el segundo miembro de la igualdad (véase el Lema 1.12). ■

Parametrizando en la ecuación (6.10), deducimos en virtud del Lema 6.2, que

$$\left(\frac{1}{2}\mathcal{I} + \mathcal{K}'\right)\boldsymbol{\xi} + \frac{d}{ds}\mathcal{V}^*\frac{d}{ds}\gamma(\mathbf{u}) = \boldsymbol{\xi} \quad \text{en } \mathbb{R} \quad (6.13)$$

Consideremos las formas bilineales $b, b^*: \mathbf{H}^{-1/2} \times \mathbf{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbb{R}$ asociadas a los operadores \mathcal{V} y \mathcal{V}^* , respectivamente:

$$b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := (\boldsymbol{\eta}, \mathcal{V}\boldsymbol{\xi}) \quad b^*(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) := (\boldsymbol{\eta}, \mathcal{V}^*\boldsymbol{\xi}) \quad (6.14)$$

y la forma bilineal $c: \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbb{R}$ asociada al operador de doble capa \mathcal{K} :

$$c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta}) := \left(\boldsymbol{\eta}, \left(\frac{1}{2}\mathcal{I} - \mathcal{K}\right)\gamma(\mathbf{v})\right) \quad (6.15)$$

Parametrizando las integrales sobre Γ en la formulación simétrica, y teniendo en cuenta las consideraciones anteriores, deducimos la siguiente formulación variacional del problema (6.1):

hallar $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$ y $\boldsymbol{\xi} \in \mathbf{H}_0^{-1/2}$ tales que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + b^*(\gamma(\mathbf{u})', \gamma(\mathbf{v})') - c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0, \Omega^-} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \\ c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) + b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^{-1/2} \end{aligned} \quad (6.16)$$

En el Lema siguiente damos algunas propiedades de los operadores integrales \mathcal{V} , \mathcal{K} y \mathcal{V}^* que emplearemos para probar que el problema (6.16) está bien planteado.

Lema 6.3. *Los operadores $\mathcal{V}, \mathcal{V}^*: \mathbf{H}^{-1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ y $\mathcal{K}: \mathbf{H}^{1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{1/2}$ son lineales y continuos. Además, existe una constante $\beta > 0$ tal que*

$$(\boldsymbol{\eta}, \mathcal{V}\boldsymbol{\eta}) \geq \beta \|\boldsymbol{\eta}\|_{-1/2}^2 \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^{-1/2}$$

y el operador $-\frac{d}{ds}\mathcal{V}^*\frac{d}{ds}: \mathbf{H}^{1/2} \rightarrow \mathbf{H}^{-1/2}$ es no negativo, es decir,

$$(\mathbf{g}', \mathcal{V}^*\mathbf{g}') \geq 0 \quad \forall \mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}$$

Prueba. Empleando las mismas técnicas que en el Lema 1.10, se ve fácilmente que los operadores \mathcal{V} y \mathcal{K} heredan las propiedades de los potenciales de simple y doble capa clásicos, que se prueban en C. Chen y J. Zhou [15]. Por otra parte, como $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$ es suprayectiva, dada $\mathbf{g} \in \mathbf{H}^{1/2}$, existe una función $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^1(\Omega^-)$ tal que $\gamma(\mathbf{u}) = \mathbf{g}$. En virtud del Lema 6.2,

$$(\mathbf{g}', \mathcal{V}^*\mathbf{g}') = \int_{\Gamma} (\widehat{\mathcal{W}}\mathbf{u})\mathbf{u} \, d\sigma$$

El resultado se deduce usando que el segundo miembro de la expresión anterior es no negativo (cf. C. Chen y J. Zhou [15]). ■

Sea $\mathbf{M} := \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0^{-1/2}$ el espacio producto dotado del producto escalar natural y de la norma inducida $\|\cdot\|_M$. Consideramos la forma bilineal $A: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$A(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) \quad (6.17)$$

donde denotamos los elementos $(\mathbf{u}, \boldsymbol{\xi})$ y $(\mathbf{v}, \boldsymbol{\eta})$ de \mathbf{M} por $\hat{\mathbf{u}}$ y $\hat{\mathbf{v}}$, respectivamente, y

$$B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) := b^*(\gamma(\mathbf{u})', \gamma(\mathbf{v})') - c(\mathbf{v}, \boldsymbol{\xi}) + c(\mathbf{u}, \boldsymbol{\eta}) + b(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \quad (6.18)$$

Sea $L: \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal continua dada por

$$L(\hat{\mathbf{v}}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0, \Omega^-} \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{M} \quad (6.19)$$

Con estas notaciones, el problema (6.16) es equivalente a:

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{M} \text{ tal que} \\ &A(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = L(\hat{\mathbf{v}}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{M} \end{aligned} \quad (6.20)$$

Teorema 6.4. *El problema (6.16) tiene una única solución.*

Prueba. En virtud de las propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y del Lema 6.3, la forma $A: \mathbf{M} \times \mathbf{M} \rightarrow \mathbb{R}$ es continua y elíptica. Por tanto, el resultado se sigue aplicando el Lema de Lax-Milgram. ■

6.2. El problema discreto

Por simplicidad en la exposición, suponemos que la curva Γ_0 es poligonal. Dado un número entero $N > 0$, llamamos $h := 1/N$ y consideramos una triangulación exacta τ_h^- del dominio $\overline{\Omega^-}$. En lo que sigue, empleamos las mismas notaciones que en la sección 2.2.1. Aproximamos los campos de desplazamientos mediante funciones en el espacio \mathbf{V}_h . Para aproximar la incógnita $\boldsymbol{\xi}$, consideramos el espacio producto \mathbf{H}_h . El problema discreto asociado al problema (6.16) consiste en

hallar $\mathbf{u}_h \in \mathbf{V}_h$ y $\boldsymbol{\xi}_h \in \mathbf{H}_h$ tales que

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + b^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)') - c(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\xi}_h) &= (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega^-} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \\ b(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + c(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}_h) &= 0 \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h \end{aligned} \quad (6.21)$$

Consideremos el espacio producto $\mathbf{M}_h := \mathbf{V}_h \times \mathbf{H}_h$. Entonces, el problema (6.21) es equivalente al problema siguiente:

$$\begin{aligned} & \text{hallar } \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{M}_h \text{ tal que} \\ & A(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) = L(\hat{\mathbf{v}}_h) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h \end{aligned} \quad (6.22)$$

Como \mathbf{M}_h es un subespacio de dimensión finita de \mathbf{M} , el problema (6.22) está bien planteado. Además, gracias a las propiedades de la forma $A(\cdot, \cdot)$, aplicando el Lema de Céa, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_M \leq C \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}_h\|_M \quad (6.23)$$

Teorema 6.5. *Si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega^-)$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega^-} + \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h\|_{-1/2} \leq Ch\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^-}$$

Prueba. Empleando las estimaciones del error de interpolación locales (2.17), deducimos que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\inf_{\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h} \|\mathbf{v} - \mathbf{v}_h\|_{1,\Omega^-} \leq Ch\|\mathbf{v}\|_{2,\Omega^-} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} \cap \mathbf{H}^2(\Omega^-)$$

Por otra parte, las propiedades de aproximación clásicas en espacios de Sobolev periódicos (véase el Lema 2.5) implican que

$$\inf_{\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h} \|\boldsymbol{\eta} - \boldsymbol{\eta}_h\|_{-1/2} \leq Ch\|\boldsymbol{\eta}\|_{1/2} \quad \forall \boldsymbol{\eta} \in \mathbf{H}_0^{-1/2} \cap \mathbf{H}^{1/2}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h . El resultado se deduce de la desigualdad (6.23), usando un Teorema de traza. ■

6.3. El esquema completamente discreto

En esta sección proponemos un esquema completamente discreto para resolver el problema (6.21). Definimos perturbaciones de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y de la forma lineal $L(\cdot)$ usando un esquema de cuadratura de orden 0 sobre cada triángulo de la triangulación τ_h^- , y utilizamos la fórmula de cuadratura (2.28), de orden 1, para definir perturbaciones de las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$, $b^*(\cdot, \cdot)$ y $c(\cdot, \cdot)$. El núcleo de los operadores \mathcal{V} y \mathcal{V}^* presenta una singularidad del mismo tipo que la del operador de capa simple para la ecuación de Laplace. Por tanto, para aproximar las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$ y $b^*(\cdot, \cdot)$ empleamos las mismas técnicas que en la sección 2.3.1. Por

otra parte, en este caso el operador de doble capa también tiene un núcleo singular. Aproximamos la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$ usando técnicas similares a las empleadas para aproximar las formas bilineales $b(\cdot, \cdot)$ y $b^*(\cdot, \cdot)$. Este esquema representa una gran simplificación con respecto al que se utiliza en C. Carstensen et al. [13], donde se emplean una fórmula simétrica de orden 19 en cada triángulo y una fórmula de Gauss de 32 nodos en cada elemento de contorno.

Sea $a_h: \mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(\lambda(\nabla \cdot \mathbf{u}_h)(\nabla \cdot \mathbf{v}_h) + 2\mu \mathbf{E}[\mathbf{u}_h] : \mathbf{E}[\mathbf{v}_h]) \quad (6.24)$$

y sea $L_h: \mathbf{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$ la forma lineal dada por

$$L_h(\hat{\mathbf{v}}_h) := \sum_{T \in \tau_h^-} Q_T(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h) \quad (6.25)$$

A continuación, definimos una aproximación de la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$ sobre $\mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h$. Teniendo en cuenta que los elementos del espacio \mathbf{H}_h son funciones constantes a trozos, basta definir aproximaciones $\mathbf{V}_{i,j}$ de

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{V}(s, t) ds dt$$

Como la función $\mathbf{V}(\cdot, \cdot)$ presenta una singularidad de tipo logarítmico, se debe tener cuidado en la aplicación de las fórmulas de cuadratura. Para evitar la singularidad, siguiendo G.C. Hsiao et al. [51], escribimos:

$$\mathbf{V}(s, t) = -c_{\lambda, \mu} \log |s - t|^2 \mathbf{I} + \mathbf{B}(s, t)$$

donde $c_{\lambda, \mu} := \frac{\lambda + 3\mu}{8\pi\mu(\lambda + 2\mu)}$ y la función $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$ es de clase \mathcal{C}^∞ en el dominio $Q := \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] ; |s - t| < 1\}$. Calculamos la primera integral de forma exacta y aproximamos la segunda mediante la fórmula $\hat{\ell}_2$. Entonces, definimos

$$\mathbf{V}_{i,j} := h^2 \left(\hat{\ell}_2(\mathbf{B}(s_{\underline{i}-1} + h \cdot, s_{\underline{j}-1} + h \cdot)) - c_{\lambda, \mu} (\log h^2 + B_{\underline{i}-\underline{j}}) \mathbf{I} \right)$$

donde las constantes B_k y los índices $(\underline{i}, \underline{j})$ están dados por (2.29) y (2.31), respectivamente. La periodicidad de la función $\mathbf{V}(\cdot, \cdot)$ permite utilizar los índices $(\underline{i}, \underline{j})$ en vez de (i, j) , y evitar así la vecindad de $\partial Q = \{(s, t) \in [0, 1] \times [0, 1] ; |s - t| = 1\}$. Dada $\boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$, para $i = 1, \dots, N$, denotamos por $\boldsymbol{\eta}^i := \boldsymbol{\eta}_h|_{(s_{i-1}, s_i)}$. Definimos la perturbación $b_h: \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$b_h(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) := \sum_{i,j=1}^N (\boldsymbol{\eta}^i)^\top \mathbf{V}_{i,j} \boldsymbol{\xi}^j \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

Sean $\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$. Para definir una aproximación de $b^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)')$, basta notar que si $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, entonces¹ $\gamma(\mathbf{v}_h) \in \mathbf{T}_h$ y $\gamma(\mathbf{v}_h)' \in \mathbf{H}_h$. Luego, es suficiente dar una aproximación de la forma bilineal $b^*(\cdot, \cdot)$ sobre $\mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h$. Como la singularidad del núcleo de $b^*(\cdot, \cdot)$ es del mismo tipo que la de $\mathbf{V}(\cdot, \cdot)$, utilizamos las mismas técnicas que para la forma bilineal $b(\cdot, \cdot)$. Aproximamos

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_j} \mathbf{V}^*(s, t) \simeq \mathbf{V}_{i,j}^*$$

donde

$$\mathbf{V}_{i,j}^* := h^2 \left(\hat{\ell}_2(\mathbf{B}^*(s_{i-1} + h\cdot, s_{j-1} + h\cdot)) - c_{\lambda,\mu}^*(\log h^2 + B_{i-j}) \mathbf{I} \right)$$

siendo $c_{\lambda,\mu}^* := \frac{\mu(\lambda+\mu)}{2\pi(\lambda+2\mu)}$ y $\mathbf{B}^*(\cdot, \cdot)$ una función de clase $\mathcal{C}^\infty(Q)$. Definimos la forma bilineal $b_h^*: \mathbf{H}_h \times \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$ como sigue:

$$b_h^*(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) := \sum_{i,j=1}^N (\boldsymbol{\eta}^i)^\top \mathbf{V}_{i,j}^* \boldsymbol{\xi}^j \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

Por último, definimos una aproximación de la forma bilineal $c(\cdot, \cdot)$ sobre $\mathbf{V}_h \times \mathbf{H}_h$. Basta dar un esquema de cuadratura para aproximar

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_{j+1}} \ell_j(t) \mathbf{K}(s, t) dt ds$$

donde $\{\ell_j\}_{j=1}^N$ es la base nodal del espacio T_h . Para evitar la singularidad del núcleo del operador \mathcal{K} , efectuamos la siguiente descomposición:

$$\mathbf{K}(s, t) = -c'_{\lambda,\mu} \frac{1}{s-t} \tilde{\mathbf{I}} + \mathbf{C}(s, t)$$

donde $c'_{\lambda,\mu} := \frac{\mu}{2\pi(\lambda+2\mu)}$ y $\mathbf{C}(\cdot, \cdot)$ es una función de clase \mathcal{C}^∞ . El primer sumando se calcula de forma exacta:

$$\int_{s_{i-1}}^{s_i} \int_{s_{j-1}}^{s_{j+1}} \frac{1}{s-t} \ell_j(t) \tilde{\mathbf{I}} dt ds = \frac{h}{2} A_{i-j} \tilde{\mathbf{I}}$$

donde las constantes A_k son independientes de la curva Γ y están dadas por

$$A_1 := 4 \log 2, \quad A_2 := 9 \log 3 - 12 \log 2$$

¹El espacio T_h se define en (2.32).

y para $k > 2$,

$$A_k := (k+1)^2 \log\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) - 4\left(k + \frac{1}{2}\right) \log\left(1 - \frac{1}{k}\right) \\ - k^2 \log\left(1 - \frac{1}{(k-1)^2}\right) + 4(k-1) \log\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

Si $k \leq 0$, $A_k := -A_{1-k}$. Por otra parte, como \mathbf{C} es una función de clase \mathcal{C}^∞ , el segundo término de la descomposición se puede aproximar mediante la fórmula $\hat{\ell}_2$. Denotamos por

$$\mathbf{C}^{ij}(s, t) := \ell_j(s_{j-1} + ht) \mathbf{C}(s_{i-1} + hs, s_{j-1} + ht) + \ell_j(s_j + ht) \mathbf{C}(s_{i-1} + hs, s_j + ht)$$

Entonces, definimos la forma bilineal $c_h: \mathbf{V}_h \times \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$c_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) := \frac{1}{2}(\boldsymbol{\eta}_h, \gamma \mathbf{v}_h) \\ - \sum_{i,j=1}^N (\boldsymbol{\eta}^i)^\top \left(h^2 \hat{\ell}_2(\mathbf{C}^{ij}) - \frac{\mu}{2\pi(\lambda + 2\mu)} \frac{h}{2} A_{i-j} \tilde{\mathbf{I}} \right) \gamma \mathbf{v}_h(s_j)$$

Nota. La evaluación de las funciones regulares $\mathbf{B}(\cdot, \cdot)$, $\mathbf{B}^*(\cdot, \cdot)$ y $\mathbf{C}(\cdot, \cdot)$ cuando sus argumentos son próximos se realiza mediante un desarrollo de Taylor, de forma similar a como se hace con la función $F(\cdot, \cdot)$ en la sección 2.3.1.

En estos momentos, estamos en condiciones de dar un esquema completamente discreto asociado al problema (6.21). Sea $A_h: \mathbf{M}_h \times \mathbf{M}_h \rightarrow \mathbb{R}$ la forma bilineal dada por

$$A_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) := a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + B_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h)$$

donde

$$B_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) := b_h^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)') - c_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\xi}_h) + b_h(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) + c_h(\mathbf{u}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \quad (6.26)$$

Proponemos el siguiente esquema completamente discreto para resolver el problema (6.16):

$$\text{hallar } \hat{\mathbf{u}}_h^* \in \mathbf{M}_h \text{ tal que} \\ A_h(\hat{\mathbf{u}}_h^*, \hat{\mathbf{v}}_h) = L_h(\hat{\mathbf{v}}_h) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h \quad (6.27)$$

6.4. El efecto de la integración numérica

En esta sección estudiamos la estabilidad y la convergencia de las soluciones del esquema completamente discreto (6.27) y damos estimaciones del error. Comenzamos con algunas estimaciones del error cometido al aproximar los coeficientes del sistema (6.21) de la forma descrita en la sección anterior.

Lema 6.6. *Supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega^-)$. Entonces existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|L(\hat{\mathbf{v}}_h) - L_h(\hat{\mathbf{v}}_h)| \leq Ch \|\mathbf{f}\|_{1,\infty,\Omega^-} \|\hat{\mathbf{v}}_h\|_M \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h$$

Prueba. Este resultado es una consecuencia del Lema 2.7. ■

Lema 6.7. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) - a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)| \leq Ch \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega^-} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega^-} \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

Prueba. Basta aplicar el Lema 26.6 de A. Ženíšek [100]. ■

Para la forma bilineal asociada a los términos de contorno, se tiene el resultado siguiente.

Lema 6.8. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|B(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) - B_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h)| \leq Ch \|\hat{\mathbf{u}}_h\|_M \|\hat{\mathbf{v}}_h\|_M \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h$$

Prueba. De forma análoga al Lema 11 de M. Crouzeix y F.J. Sayas [25], se prueba que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$|b(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - b_h(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h)| \leq Ch \|\boldsymbol{\xi}_h\|_{-1/2} \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1/2} \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h \quad (6.28)$$

De forma similar, también se tiene que

$$|b^*(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - b_h^*(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h)| \leq Ch \|\boldsymbol{\xi}_h\|_{-1/2} \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1/2} \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h . Usando la continuidad de los operadores lineales $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H^{-1/2}$ y $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$, se deduce que

$$|b^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)') - b_h^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)')| \leq Ch \|\mathbf{u}_h\|_{1,\Omega^-} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega^-}. \quad (6.29)$$

Por último, veamos que existe una constante positiva C , independiente de h , tal que

$$|c(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - c_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)| \leq Ch^{3/2} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega^-} \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1/2} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h \quad (6.30)$$

En efecto, si denotamos por $\hat{e}_2(\cdot) := \int_0^1 \int_0^1 \cdot - \hat{\ell}_2(\cdot)$ el funcional de error asociado a la fórmula de cuadratura $\hat{\ell}_2$, podemos escribir

$$c(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - c_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = h^2 \sum_{i,j=1}^N (\boldsymbol{\eta}^i)^\top \hat{e}_2(\mathbf{C}^{i,j}) \gamma \mathbf{v}_h(s_j)$$

Como la fórmula $\hat{\ell}_2$ es de orden 1, aplicando el Lema de Bramble-Hilbert, tenemos que

$$|\hat{e}_2(\mathbf{C}^{ij})| \leq C|\mathbf{C}^{ij}|_{2,\infty,D}$$

donde $D = [0, 1] \times [0, 1]$. Usando la regla de la cadena, deducimos que

$$|\mathbf{C}^{ij}|_{2,\infty,D} \leq Ch^2 \|\mathbf{C}\|_{2,\infty,D}$$

Por tanto,

$$|c(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) - c_h(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h)| \leq Ch^4 \|\mathbf{C}\|_{2,\infty,D} \sum_{i=1}^N |\boldsymbol{\eta}^i| \sum_{j=1}^N |\gamma \mathbf{v}_h(s_j)|$$

Ahora bien, usando una desigualdad inversa, se tiene que

$$h \sum_{i=1}^N |\boldsymbol{\eta}^i| = \int_0^1 |\boldsymbol{\eta}_h(s)| ds \leq \|\boldsymbol{\eta}_h\|_0 \leq Ch^{-1/2} \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{-1/2} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

Por otra parte, como las normas $\|g\|_0$ y $\sqrt{h \sum_{i=1}^N g(t_i)^2}$ son equivalentes en T_h , empleando un Teorema de traza, obtenemos que

$$\sum_{j=1}^N |\gamma \mathbf{v}_h(s_j)| \leq Ch^{-1} \|\mathbf{v}_h\|_{1,\Omega^-}$$

La desigualdad (6.30) es una consecuencia inmediata de las tres últimas desigualdades. El resultado se deduce empleando la desigualdad triangular y las estimaciones (6.28)–(6.30). \blacksquare

Aplicando los Lemas 6.7 y 6.8, deducimos el siguiente resultado para la forma bilineal global.

Proposición 6.9. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$|A(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) - A_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h)| \leq Ch \|\hat{\mathbf{u}}_h\|_M \|\hat{\mathbf{v}}_h\|_M \quad \forall \hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h$$

Como consecuencia del resultado anterior, el problema (6.27) está bien planteado cuando h es suficientemente pequeño. Además, se verifica la siguiente estimación del error.

Teorema 6.10. *Supongamos que $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega^-)$ y que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^2(\Omega^-)$. Entonces, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^*\|_{1,\Omega^-} + \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h^*\|_{-1/2} \leq Ch (\|\mathbf{u}\|_{2,\Omega^-} + \|\mathbf{f}\|_{1,\infty,\Omega^-})$$

Prueba. En virtud del Lema de Strang, se tiene la siguiente estimación del error abstracta

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h^*\|_M &\leq C \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}_h\|_M + \sup_{\hat{\mathbf{z}}_h \in \mathbf{M}_h} \frac{|L(\hat{\mathbf{z}}_h) - L_h(\hat{\mathbf{z}}_h)|}{\|\hat{\mathbf{z}}_h\|_M} \\ &+ C \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\hat{\mathbf{z}}_h \in \mathbf{M}_h} \frac{|A(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{z}}_h) - A_h(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{z}}_h)|}{\|\hat{\mathbf{z}}_h\|_M} \end{aligned}$$

donde $C > 0$ es una constante independiente de h . El resultado se sigue aplicando los Lemas 2.5 y 6.6, la Proposición 6.9 y la desigualdad (2.19). ■

6.5. Una técnica de preconditionamiento

En esta sección proponemos un algoritmo para resolver los sistemas a los que conduce la formulación (6.16). Para ello, consideramos los operadores $\mathcal{A}, \mathcal{B}^* : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$ definidos mediante las relaciones:

$$(\mathcal{A}\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega^-} = a(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad (\mathcal{B}^*\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega^-} = b^*(\gamma(\mathbf{u}_h)', \gamma(\mathbf{v}_h)') \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

el operador $\mathcal{B} : \mathbf{H}_h \rightarrow \mathbf{H}_h$ dado por

$$(\mathcal{B}\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = b(\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \quad \forall \boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

y el operador $\mathcal{C} : \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{H}_h$ definido por

$$(\mathcal{C}\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) = -c(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

Gracias a las propiedades de la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y de los operadores integrales \mathcal{V} y \mathcal{V}^* , los operadores \mathcal{A} y \mathcal{B} son autoadjuntos y definidos positivos, y el operador \mathcal{B}^* es autoadjunto y semidefinido positivo. Sea $\tilde{\mathbf{f}} \in \mathbf{V}_h$ la proyección ortogonal de \mathbf{f} en $\mathbf{L}^2(\Omega^-)$ sobre \mathbf{V}_h . Entonces,

$$(\tilde{\mathbf{f}}, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega^-} = (\mathbf{f}, \mathbf{v}_h)_{0, \Omega^-} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

El problema discreto (6.21) es equivalente al problema siguiente, escrito en forma operacional:

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} + \mathcal{B}^* & \mathcal{C}' \\ \mathcal{C} & -\mathcal{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \boldsymbol{\xi}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{\mathbf{f}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (6.31)$$

Nótese que el sistema (6.31) tiene la misma estructura que el sistema (2.44). Por tanto, para resolverlo podemos emplear la técnica de preconditionamiento propuesta por J.H. Bramble y J.E. Pasciak [9].

En el siguiente resultado se establece que los operadores \mathcal{A} y $\mathcal{A} + \mathcal{B}^*$ son espectralmente equivalentes. Como consecuencia, tienen los mismos preconditionadores.

Lema 6.11. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{A}} \leq \|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{A}+\mathcal{B}^*} \leq C\|\mathbf{v}_h\|_{\mathcal{A}} \quad \forall \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

Prueba. La primera desigualdad se deduce empleando el Lema 6.3. La segunda desigualdad es consecuencia del Lema 6.3, la continuidad de los operadores $\frac{d}{ds}: H^{1/2} \rightarrow H_0^{-1/2}$ y $\gamma: H^1(\Omega^-) \rightarrow H^{1/2}$, y la desigualdad de Korn. ■

Sea \mathcal{R} un preconditionador de $\mathcal{A} + \mathcal{B}^*$. Entonces existen constantes positivas α_0 y α_1 tales que para cada $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$, se satisfacen las desigualdades siguientes:

$$\alpha_0((\mathcal{A} + \mathcal{B}^*)\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega^-} \leq (\mathcal{R}\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega^-} \leq \alpha_1((\mathcal{A} + \mathcal{B}^*)\mathbf{v}_h, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega^-}$$

En lo que sigue, suponemos que $\alpha_1 < 1$. Entonces, la forma bilineal

$$\left[\begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \boldsymbol{\xi}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix} \right] := ((\mathcal{A} + \mathcal{B}^* - \mathcal{R})\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h)_{0,\Omega^-} + (\boldsymbol{\xi}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \quad (6.32)$$

define un producto escalar en \mathbf{M}_h .

El sistema

$$\begin{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{B}^*) & \mathcal{R}^{-1}\mathcal{C}' \\ \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}(\mathcal{A} + \mathcal{B}^*) - \mathcal{C} & \mathcal{B} + \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}\mathcal{C}' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \boldsymbol{\xi}_h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{R}^{-1}\tilde{\mathbf{f}} \\ \mathcal{C}\mathcal{R}^{-1}\tilde{\mathbf{f}} \end{pmatrix} \quad (6.33)$$

es equivalente al sistema (6.31). Llamaremos \mathcal{S} y G a los operadores del primer y segundo miembro, respectivamente. Es sencillo comprobar que el operador \mathcal{S} es autoadjunto en el producto escalar $[\cdot, \cdot]$. Por otra parte, aplicando el Teorema 1 de J.H. Bramble y J.E. Pasciak [9], deducimos que para cualquier $(\mathbf{v}_h, \boldsymbol{\eta}_h) \in \mathbf{M}_h$ se verifica

$$\lambda_0 \left[\tilde{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix} \right] \leq \left[\mathcal{S} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix} \right] \leq \lambda_1 \left[\tilde{\mathcal{S}} \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{v}_h \\ \boldsymbol{\eta}_h \end{pmatrix} \right]$$

donde λ_0 y λ_1 son las constantes del Lema 2.13, $\mathcal{I}: \mathbf{V}_h \rightarrow \mathbf{V}_h$ es el operador identidad y

$$\tilde{\mathcal{S}} = \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{B}^*)^{-1}\mathcal{C}' + \mathcal{B} \end{pmatrix}$$

Esto es, el operador \mathcal{S} es espectralmente equivalente al operador $\tilde{\mathcal{S}}$. Por tanto, cualquier preconditionador del operador $\tilde{\mathcal{S}}$ se puede emplear para preconditionar el sistema (6.33). De este modo, el problema se reduce a encontrar un preconditionador para el operador $\mathcal{B} + \mathcal{C}(\mathcal{A} + \mathcal{B}^*)^{-1}\mathcal{C}'$. De forma análoga a la Proposición 2.14, se prueba que este operador es espectralmente equivalente al operador \mathcal{B} .

Teorema 6.12. *Existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{\mathcal{B}} \leq \|\boldsymbol{\eta}_h\|_{(\mathcal{B}+\mathcal{C}(\mathcal{A}+\mathcal{B}^*))^{-1}\mathcal{C}} \leq C\|\boldsymbol{\eta}_h\|_{\mathcal{B}} \quad \forall \boldsymbol{\eta}_h \in \mathbf{H}_h$$

Así, el operador \mathcal{S} es definido positivo en el producto escalar $[\cdot, \cdot]$. Por tanto, el sistema (6.33) se puede resolver mediante cualquiera de los métodos conocidos para resolver sistemas simétricos y definidos positivos. En particular, puede utilizarse un método de gradiente conjugado preconditionado. En efecto, si \mathcal{P} es un preconditionador de \mathcal{B} , podemos utilizar el método de gradiente conjugado para resolver el sistema

$$\tilde{\mathcal{P}}^{-1}\mathcal{S} \begin{pmatrix} \mathbf{u}_h \\ \boldsymbol{\xi}_h \end{pmatrix} = \tilde{\mathcal{P}}^{-1}G \quad \tilde{\mathcal{P}} := \begin{pmatrix} \mathcal{I} & 0 \\ 0 & \mathcal{P} \end{pmatrix}$$

en el producto escalar $[\mathcal{S}\cdot, \cdot]$. En definitiva, si disponemos de un preconditionador del operador \mathcal{A} y otro del operador \mathcal{B} , podemos emplear el algoritmo anterior para resolver el sistema (6.21). La elección más sencilla es tomar $\mathcal{R} = \mathcal{A}$ y $\mathcal{P} = \mathcal{B}$.

6.6. Una aplicación en elasto-plasticidad

En este apartado nos interesamos por el uso de la técnica de acoplamiento de elementos finitos y elementos de contorno para resolver un problema elasto-plástico en el exterior de un dominio plano acotado. Este tipo de problemas fueron estudiados en \mathbb{R}^3 por M. Costabel y E.P. Stephan [24], y G.N. Gatica y G.C. Hsiao [32, 36]. Recientemente, C. Carstensen, S.A. Funken y E.P. Stephan [13] han aplicado este método al problema en dos dimensiones. En todos estos trabajos la frontera de acoplamiento es una curva poligonal.

Sea Ω_0 un dominio acotado en \mathbb{R}^2 y denotemos por Γ_0 su frontera. Consideramos una curva cerrada simple Γ_1 que contiene el dominio $\bar{\Omega}_0$ en su interior. Por simplicidad en la exposición, supondremos que las curvas Γ_0 y Γ_1 son poligonales. Denotamos por Ω_{NL} la región delimitada por las curvas Γ_0 y Γ_1 , y por Ω_L el complementario de $\bar{\Omega}_0 \cup \bar{\Omega}_{NL}$ en \mathbb{R}^2 . El vector unitario normal a Γ_1 , orientado de Ω_{NL} a Ω_L se designa por \mathbf{n}_1 . Por último, si v es una función definida en Ω_{NL} (Ω_L), denotamos por v_{NL} (v_L , resp.) su límite sobre Γ_1 .

Suponemos que el material que ocupa la región Ω'_0 tiene un comportamiento plástico en Ω_{NL} y es lineal elástico en Ω_L . El comportamiento de un material elástico, homogéneo e isótropo está descrito por la *ley de Hooke* (véase la sección 6.1). Por otra parte, suponemos que la ley constitutiva del material plástico es la *ley de Hencky*, es decir, el tensor de tensiones

$$\tilde{\mathbf{S}}[\mathbf{u}] := (k(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\mathbf{E}[\mathbf{u}]))) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} + 2\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\mathbf{E}[\mathbf{u}])) \mathbf{E}[\mathbf{u}]$$

donde $k: \overline{\Omega}_{NL} \rightarrow \mathbb{R}$ es el *módulo de compresión volumétrica*, $\tilde{\mu}: \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ es la *función de Lamé* y $G: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $G(\boldsymbol{\alpha}) := \boldsymbol{\alpha}^* : \boldsymbol{\alpha}^*$, siendo $\boldsymbol{\alpha}^* := \boldsymbol{\alpha} - \frac{1}{2} \text{tr } \boldsymbol{\alpha} \mathbf{I}$ el *tensor desviación* del tensor $\boldsymbol{\alpha}$. Dada una función $\mathbf{f} \in \mathbf{L}^2(\Omega_{NL})$, buscamos un campo de desplazamientos $\mathbf{u}: \Omega'_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \tilde{\mathbf{S}}[\mathbf{u}] &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega_{NL} \\
-\nabla \cdot \mathbf{S}[\mathbf{u}] &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_L \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_0 \\
\mathbf{u}_{NL} &= \mathbf{u}_L \\
\tilde{\mathbf{S}}[\mathbf{u}_{NL}] \mathbf{n}_1 &= \mathbf{S}[\mathbf{u}_L] \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{6.34}$$

En lo que sigue, suponemos que las funciones k y $\tilde{\mu}$ son de clase \mathcal{C}^1 . También suponemos que existen constantes positivas k_i ($i = 1, 2$) y μ_j ($j = 0, 1, 2, 3$) de modo que se verifican las relaciones siguientes:

$$k_1 \leq k(\mathbf{x}) \leq k_2 \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL} \tag{6.35}$$

$$\mu_0 \leq \tilde{\mu}(\mathbf{x}, s) \leq k(\mathbf{x}) \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^+ \tag{6.36}$$

$$\mu_1 \leq \tilde{\mu}(\mathbf{x}, s) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, s) s \leq \mu_2 \quad \forall (\mathbf{x}, \beta) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^+ \tag{6.37}$$

$$\left| \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_l}(\mathbf{x}, s) \right| \leq \mu_3 \quad \forall (\mathbf{x}, s) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^+ \quad (l = 1, 2) \tag{6.38}$$

Consideremos la función no lineal $\mathbf{B}: \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) := (k(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))) \text{tr } \boldsymbol{\alpha} \mathbf{I} + 2 \tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \boldsymbol{\alpha} \tag{6.39}$$

Entonces el problema (6.34) se puede poner en la forma

$$\begin{aligned}
-\nabla \cdot \mathbf{B}(\cdot, \mathbf{E}[\mathbf{u}]) &= \mathbf{f} && \text{en } \Omega_{NL} \\
-\nabla \cdot \mathbf{S}[\mathbf{u}] &= \mathbf{0} && \text{en } \Omega_L \\
\mathbf{u} &= \mathbf{0} && \text{sobre } \Gamma_0 \\
\mathbf{u}_{NL} &= \mathbf{u}_L \\
\mathbf{B}(\cdot, \mathbf{E}[\mathbf{u}_{NL}]) \mathbf{n}_1 &= \mathbf{S}[\mathbf{u}_L] \mathbf{n}_1 \\
\mathbf{u}(\mathbf{x}) &= \mathcal{O}(1) && \text{cuando } |\mathbf{x}| \rightarrow +\infty
\end{aligned} \tag{6.40}$$

En lo que sigue, suponemos que la función \mathbf{B} posee las propiedades siguientes, que son una generalización de las Hipótesis 3.1–3.4.

Hipótesis 6.1. La función $\mathbf{B}: \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ es continua. Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$|\mathbf{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})| \leq C(1 + |\boldsymbol{\alpha}|) \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL} \quad \forall \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^4$$

Hipótesis 6.2. Las funciones $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}$ ($i, j, k, l = 1, 2$) son continuas. Además, existe una constante $C > 0$ tal que

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \beta_{kl} \beta_{ij} \geq C \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2 \quad \forall \mathbf{x} \in \overline{\Omega}_{NL} \quad \forall \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta} \in \mathbb{R}^4$$

Hipótesis 6.3. Las funciones $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}$ ($i, j, k, l = 1, 2$) son continuas y existe una constante $C > 0$ tal que

$$\left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq C \quad \forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$$

Hipótesis 6.4. Las funciones $\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}: \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ($i, j, l = 1, 2$) son continuas. Además, existe una constante positiva C tal que

$$\left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_m}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq C(1 + |\boldsymbol{\alpha}|) \quad \forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$$

Consideramos una curva cerrada simple Γ de clase \mathcal{C}^∞ que contiene el dominio $\overline{\Omega}_0 \cup \overline{\Omega}_{NL}$ en su interior. Denotamos por Ω^- la región limitada por las curvas Γ_1 y Γ , y por Ω^+ la región no acotada exterior a Γ . Sea $\Omega := \Omega_{NL} \cup \Gamma_1 \cup \Omega^-$. Entonces, el problema de contorno (6.40) es equivalente a un *problema de transmisión* que consiste en un problema planteado en el dominio acotado Ω , acoplado con un problema lineal y homogéneo planteado en el dominio exterior Ω^+ mediante condiciones de transmisión sobre los desplazamientos y las tracciones sobre Γ (ver (6.4)).

Consideramos la forma $a: \mathbf{H}^1(\Omega) \times \mathbf{H}^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := a_{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + a_L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega)$$

donde $a_L(\cdot, \cdot)$ es la forma bilineal dada por (6.5) y

$$a_{NL}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) := \int_{\Omega_{NL}} \mathbf{B}(\cdot, \mathbf{E}[\mathbf{u}]) : \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x}$$

Sea \mathbf{V} el subespacio de $\mathbf{H}^1(\Omega)$ formado por las funciones que se anulan sobre Γ_0 , es decir,

$$\mathbf{V} := \{\mathbf{v} \in \mathbf{H}^1(\Omega) ; \mathbf{v}|_{\Gamma_0} = \mathbf{0}\}$$

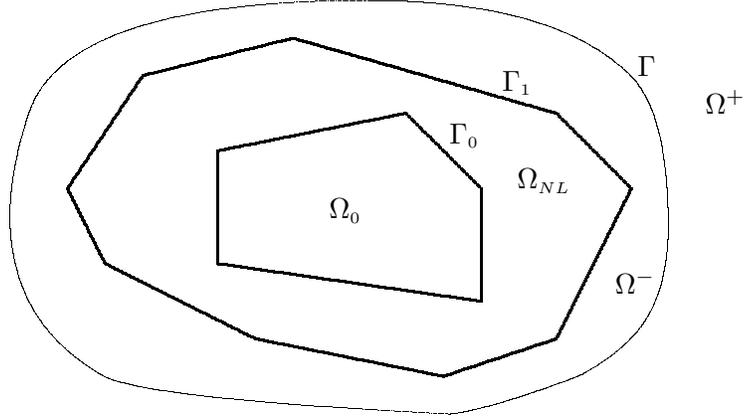


Figura 6.2: Dominio del problema de transmisión

La formulación variacional del problema (6.40) se obtiene combinando la formulación variacional del problema en el dominio acotado con las ecuaciones integrales periódicas (6.12) y (6.13), y teniendo en cuenta las condiciones de transmisión. El problema consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{\mathbf{u}} \in \mathbf{M} := \mathbf{V} \times \mathbf{H}_0^{-1/2} \text{ tal que} \\ &A(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) = L(\hat{\mathbf{v}}) \quad \forall \hat{\mathbf{v}} \in \mathbf{M} \end{aligned} \quad (6.41)$$

donde $L(\hat{\mathbf{v}}) := (\mathbf{f}, \mathbf{v})_{0, \Omega_{NL}}$ y $A(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}}) := a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + B(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{v}})$, siendo $B(\cdot, \cdot)$ la forma bilineal dada en (6.18).

De forma similar al Lema 3.1, se prueba que bajo las Hipótesis 6.1 y 6.2, la forma $a_{NL}(\cdot, \cdot)$ es acotada en $\mathbf{H}^1(\Omega_{NL})$ y fuertemente monótona con respecto a la seminorma de $\mathbf{H}^1(\Omega_{NL})$. En estas condiciones, podemos enunciar el resultado siguiente.

Teorema 6.13. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis 6.1 y 6.2. Entonces el problema (6.41) tiene una única solución.*

Discretizamos el dominio Ω del mismo modo que en la sección 3.3. Utilizaremos las mismas notaciones que entonces. El problema discreto asociado al problema variacional (6.41) consiste en

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{\mathbf{u}}_h \in \mathbf{M}_h := \mathbf{V}_h \times \mathbf{H}_h \text{ tal que} \\ &A(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) = L(\hat{\mathbf{v}}_h) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h \end{aligned} \quad (6.42)$$

Dado que \mathbf{M}_h es un subespacio de \mathbf{M} de dimensión finita, el problema (6.42) tiene una única solución cuando la función \mathbf{B} satisface las Hipótesis 6.1 y 6.2. Además, bajo

las Hipótesis 6.1 y 6.3, la forma $a_{NL}(\cdot, \cdot)$ es Lipschitz-continua en $\mathbf{H}^1(\Omega_{NL})$. Luego, si se verifican las Hipótesis 6.1–6.3, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h\|_M \leq C \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{v}}_h\|_M. \quad (6.43)$$

Si la solución del problema (6.40) es suficientemente regular, la desigualdad anterior permite obtener estimaciones del error.

Teorema 6.14. *Supongamos que $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\sigma}(\Omega)$ ($0 < \sigma < 1$). Bajo las Hipótesis 6.1–6.3, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h\|_{-1/2} \leq Ch^\sigma \|\mathbf{u}\|_{1+\sigma,\Omega}$$

Prueba. Basta utilizar la desigualdad (6.43), los Lemas 3.5 y 2.5, y un Teorema de traza. ■

A continuación proponemos un esquema completamente discreto para resolver el problema (6.42) y analizamos el efecto del uso de fórmulas de cuadratura sobre la convergencia. Empleando el esquema de cuadratura (2.24) en cada triángulo de la triangulación, definimos una aproximación de la forma $a(\cdot, \cdot)$ sobre $\mathbf{V}_h \times \mathbf{V}_h$:

$$a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := a_{NL,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + a_{L,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

donde $a_{L,h}(\cdot, \cdot)$ está dada por (6.24) y

$$a_{NL,h}(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) := \sum_{T \in \tau_{NL,h}} Q_T(\mathbf{B}(\cdot, \mathbf{E}[\mathbf{u}_h]) : \nabla \mathbf{v}_h)$$

Entonces, consideramos la siguiente aproximación de la forma $A(\cdot, \cdot)$ en \mathbf{M}_h :

$$A_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) := a_h(\mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h) + B_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h)$$

donde $B_h(\cdot, \cdot)$ está dada por (6.26). Definimos también una aproximación de la forma lineal $L(\cdot)$:

$$L_h(\hat{\mathbf{v}}_h) := \sum_{T \in \tau_{NL,h}} Q_T(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h$$

Proponemos el siguiente esquema para resolver el problema (6.40):

$$\begin{aligned} &\text{hallar } \hat{\mathbf{u}}_h^* \in \mathbf{M}_h \text{ tal que} \\ &A_h(\hat{\mathbf{u}}_h^*, \hat{\mathbf{v}}_h) = L_h(\hat{\mathbf{v}}_h) \quad \forall \hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h \end{aligned} \quad (6.44)$$

Si se verifican las Hipótesis 6.1 y 6.2, las formas $A_h(\cdot, \cdot)$ son uniformemente acotadas y uniformemente fuertemente monótonas en \mathbf{M}_h , para h suficientemente pequeño

(véase la prueba del Lema 3.7). En estas condiciones, el esquema (6.44) tiene una única solución. Si además la función \mathbf{B} satisface la Hipótesis 6.3, procediendo de forma similar al Lema 3.9 se prueba que existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$\begin{aligned} \|\hat{\mathbf{u}} - \hat{\mathbf{u}}_h^*\|_M &\leq C \left\{ \sup_{\hat{\mathbf{w}}_h \in \mathbf{M}_h} \frac{|L(\hat{\mathbf{w}}_h) - L_h(\hat{\mathbf{w}}_h)|}{\|\hat{\mathbf{w}}_h\|_M} + \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \|\hat{\mathbf{v}}_h - \hat{\mathbf{u}}\|_M \right\} \\ &+ C \inf_{\hat{\mathbf{v}}_h \in \mathbf{M}_h} \sup_{\hat{\mathbf{w}}_h \in \mathbf{M}_h} \frac{|A(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{w}}_h) - A_h(\hat{\mathbf{v}}_h, \hat{\mathbf{w}}_h)|}{\|\hat{\mathbf{w}}_h\|_M} \end{aligned} \quad (6.45)$$

Ahora bien, bajo las Hipótesis 6.1, 6.3 y 6.4, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que

$$|A(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h) - A_h(\hat{\mathbf{u}}_h, \hat{\mathbf{v}}_h)| \leq Ch(1 + \|\hat{\mathbf{u}}_h\|_M) \|\hat{\mathbf{v}}_h\|_M \quad \forall \mathbf{u}_h, \mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$$

Finalmente, empleando el Lema 6.6 y el Teorema 6.14 para estimar el segundo miembro de la desigualdad (6.45), deducimos el resultado siguiente.

Teorema 6.15. *Supongamos que se satisfacen las Hipótesis 6.1–6.4. Entonces, si $\mathbf{u} \in \mathbf{H}^{1+\sigma}(\Omega)$ ($0 < \sigma < 1$) y $\mathbf{f} \in \mathbf{W}^{1,\infty}(\Omega_{NL})$, existe una constante $C > 0$, independiente de h , tal que*

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_h^*\|_{1,\Omega} + \|\boldsymbol{\xi} - \boldsymbol{\xi}_h^*\|_{-1/2} \leq Ch^\sigma (1 + \|\mathbf{u}\|_{1+\sigma,\Omega} + \|\mathbf{f}\|_{1,\infty,\Omega_{NL}})$$

Solo queda comprobar que la función \mathbf{B} definida mediante la expresión (6.39) satisface las Hipótesis 6.1–6.4.

Proposición 6.16. *La función \mathbf{B} definida en (6.39) verifica las Hipótesis 6.1–6.4.*

Prueba. Las hipótesis de regularidad sobre las funciones k y $\tilde{\mu}$ implican que la función \mathbf{B} es continua en $\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$. Por otra parte, empleando las propiedades (6.35) y (6.36), deducimos que

$$|\mathbf{B}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha})| \leq 6k_2|\boldsymbol{\alpha}| \quad \forall (\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \in \overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$$

Sean $k, l = 1, 2$. Las derivadas $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}$ están dadas por

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = (k(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})))\delta_{ij}\delta_{kl} + 2\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))\delta_{ik}\delta_{jl} + 4\alpha_{kl}^*\alpha_{ij}^* \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))$$

La regularidad de las funciones k y $\tilde{\mu}$ permite asegurar que las derivadas $\frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}$ son funciones continuas en $\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$. Nótese que

$$\alpha_{kl}^*\alpha_{ij}^* \leq \frac{1}{2}((\alpha_{kl}^*)^2 + (\alpha_{ij}^*)^2) \leq G(\boldsymbol{\alpha})$$

Por tanto, si $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \geq 0$, en virtud de (6.35) y (6.37), se tiene que

$$\left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq k_2 + 2 \left(\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))G(\boldsymbol{\alpha}) \right) \leq k_2 + 2\mu_2$$

Si $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) < 0$, utilizando las propiedades (6.35) y (6.37), obtenemos que

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| &\leq k_2 + 4\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) - 2 \left(\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))G(\boldsymbol{\alpha}) \right) \\ &\leq 5k_2 \end{aligned}$$

Veamos ahora que la función \mathbf{B} satisface la condición de monotonía fuerte:

$$\begin{aligned} \sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \beta_{kl} \beta_{ij} &= (k(\mathbf{x}) - \tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha}))) \left(\sum_{k=1}^2 \beta_{kk} \right)^2 + 2\tilde{\mu}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2 \\ &\quad + 4 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \left(\sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij}^* \beta_{ij} \right)^2 \end{aligned}$$

Si $\frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial s}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \geq 0$, usando la propiedad (6.36) deducimos que

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \beta_{kl} \beta_{ij} \geq 2\mu_0 \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2$$

En caso contrario, aplicamos la desigualdad de Cauchy-Schwarz y obtenemos que:

$$\left(\sum_{i,j=1}^2 \alpha_{ij}^* \beta_{ij} \right)^2 \leq G(\boldsymbol{\alpha}) \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2$$

Por tanto, en virtud de (6.37),

$$\sum_{i,j,k,l=1}^2 \frac{\partial b_{ij}}{\partial \alpha_{kl}}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \beta_{kl} \beta_{ij} \geq 2\mu_1 \sum_{i,j=1}^2 \beta_{ij}^2$$

Solo queda comprobar que se verifica la Hipótesis 6.4. Para $l = 1, 2$, tenemos que

$$\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) = \frac{\partial k}{\partial x_l}(\mathbf{x}) \text{tr } \boldsymbol{\alpha} \delta_{ij} + 2 \frac{\partial \tilde{\mu}}{\partial x_l}(\mathbf{x}, G(\boldsymbol{\alpha})) \alpha_{ij}^*$$

Las hipótesis de regularidad sobre k y $\tilde{\mu}$ implican que las derivadas $\frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}$ son funciones continuas en $\overline{\Omega}_{NL} \times \mathbb{R}^4$. Además, como $k \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}_{NL})$ y $\tilde{\mu}$ satisface la condición (6.38), es inmediato que

$$\left| \frac{\partial b_{ij}}{\partial x_l}(\mathbf{x}, \boldsymbol{\alpha}) \right| \leq C|\boldsymbol{\alpha}|$$

■

En virtud de la Proposición anterior, los resultados probados en los Teoremas 6.13, 6.14 y 6.15 son ciertos para el problema (6.34).

Por tanto, los resultados dados en los Teoremas 6.13, 6.14 y 6.15 son ciertos para el problema (6.34).

Bibliografía

- [1] R. ADAMS *Sobolev spaces*, Academic Press (1975).
- [2] S.F. ASHBY, T.A. MANTEUFFEL Y P.A. SAYLOR *A taxonomy for conjugate gradient methods*, SIAM J. Numer. Anal. **27**, 1542-1568 (1990).
- [3] H. BERGER, G. WARNECKE Y W.L. WENDLAND *Finite elements for transonic potential flows*, Numer. Methods Partial Differential Equations **6**, 17-42 (1990).
- [4] H. BERGER, G. WARNECKE Y W.L. WENDLAND *Analysis of a FEM-BEM coupling method for transonic flow computations*, Maths. of Comput. **66**, 1407-1440 (1997).
- [5] C. BERNARDI *Optimal finite element interpolation on curved domains*, SIAM J. Numer. Anal. **26**, 1212-1240 (1989).
- [6] J. BIELAK Y R.C. MACCAMY *An exterior interface problem in two-dimensional elastodynamics*, Quart. Appl. Math. **41**, 143-159 (1983).
- [7] J. BIELAK Y R.C. MACCAMY *Symmetric finite element and boundary integral coupling methods for fluid-solid interaction*, Quart. Appl. Math. **49**, 107-119 (1991).
- [8] A. BOSSAVIT *Électromagnétisme, en vue de la modélisation*, Mathématiques et Applications, J.M. Ghidaglia y P. Lascaux, Springer-Verlag France, Paris (1993).
- [9] J.H. BRAMBLE Y J.E. PASCIAK *A preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems*, Math. of Comp. **50**, 1-17 (1988).
- [10] H. BRÉZIS *Análisis funcional*, Alianza Universidad textos, Alianza Ed., Madrid (1984).

- [11] F. BREZZI Y C. JOHNSON *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, *Calcolo* **16**, 189-201 (1979).
- [12] U. BRINK, C. CARSTENSEN Y E. STEIN *Symmetric coupling of boundary elements and Raviart-Thomas-type mixed finite elements in elastostatics*, *Numer. Math.* **75**, 153-174 (1996).
- [13] C. CARSTENSEN, S.A. FUNKEN Y E.P. STEPHAN *On the adaptive coupling of FEM and BEM in 2-d-elasticity*, *Numer. Math.* **77**, 187-221 (1997).
- [14] E. CASAS *Introducción a las ecuaciones en derivadas parciales*, Servicio de publicaciones. Universidad de Cantabria (1992).
- [15] C. CHEN Y J. ZHOU *Boundary Element Methods*, Academic Press, Londres (1992).
- [16] PH.G. CIARLET *The Finite Element Method for Elliptic Problems*, North-Holland, Amsterdam (1978).
- [17] PH.G. CIARLET *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris (1982).
- [18] D. COLTON Y R. KRESS *Integral equation methods in scattering theory*, Wiley, New York (1983).
- [19] PH. CLÉMENT *Approximation by finite element functions using local regularization*, *RAIRO R-2*, 77-84 (1975).
- [20] M. COSTABEL *A symmetric method for the coupling of finite elements and boundary elements*, *The Mathematics of Finite Elements and Applications IV*, MAFELAP 1987 (Ed. J.R. Whiteman), Academic Press, London, 281-288 (1988).
- [21] M. COSTABEL *Boundary integral operators on Lipschitz domains: elementary results*, *SIAM J. Math. Anal.* **19**, 613-621 (1988).
- [22] M. COSTABEL, V.J. ERVIN Y E.P. STEPHAN *Symmetric coupling of finite elements and boundary elements for a parabolic-elliptic interface problem*, *Quart. J. Appl. Math.* **48**, 265-279 (1990).
- [23] M. COSTABEL, V.J. ERVIN Y E.P. STEPHAN *Experimental convergence rates for various couplings of boundary and finite elements*, *Mathl. Comput. Modelling* **15**, 93-102 (1991).

- [24] M. COSTABEL Y E.P. STEPHAN *Coupling of finite and boundary element methods for an elastoplastic interface problem*, SIAM J. Numer. Anal. **27**, 1212-1226 (1990).
- [25] M. CROUZEIX Y F.J. SAYAS *Asymptotic expansions of the error of spline Galerkin boundary element methods*, Numer. Math. **78**, 523-547 (1998).
- [26] J. DOUGLAS Y T. DOUPONT *A Galerkin method for a nonlinear Dirichlet problem*, Math. Comp. **29**, 689-696 (1975).
- [27] G. DUVAUT *Mécanique des milieux continus*, Masson, Paris (1990).
- [28] M. FEISTAUER *On the finite element approximation of a cascade flow problem*, Numer. Math. **50**, 655-684 (1987).
- [29] R.P. FEYNMAN Y R.B. LEIGHTON *Física, Volúmen II: Electromagnetismo y materia*, Addison-Wesley Iberoamericana, S.A. (1987).
- [30] M. FORTIN Y R. GLOWINSKI *Méthodes de Lagrangien augmenté. Applications à la résolution numérique de problèmes aux limites*, Ed. Dunod, Collection Méthodes Mathématiques de Informatique (1982).
- [31] F. GARCÍA MERAYO *Lenguaje de programación Fortran 90*, Paraninfo, Madrid (1998).
- [32] G.N. GATICA Y G.C. HSIAO *On a class of variational formulations for some nonlinear interface problems*, Rendiconti di Matematica e delle sue Applicazione **10**, 4, 681-715 (1990).
- [33] G.N. GATICA Y G.C. HSIAO *On the coupled BEM and FEM for a nonlinear exterior Dirichlet problem in \mathbb{R}^2* , Numer. Math. **61**, 171-214 (1992).
- [34] G.N. GATICA Y G.C. HSIAO *The coupling of boundary integral and finite element methods for nonmonotone nonlinear problems*, Numer. Funct. Anal. Optim. **13**, 431-447 (1992).
- [35] G.N. GATICA Y G.C. HSIAO *The uncoupling of boundary integral and finite element methods for nonlinear boundary value problems*, J. Math. Anal. and Appl. **189**, 442-461 (1995).
- [36] G.N. GATICA Y G.C. HSIAO *Boundary-field equation methods for a class of nonlinear problems*, Pitman Research Notes in Math. Series **331**, Longman (1995).

- [37] G.N. GATICA Y S. MEDDAHI *An a-posteriori error estimate for the coupling of BEM and mixed FEM*, Numerical Functional Analysis and Optimization **20**, 5-6 (1999).
- [38] G.N. GATICA Y S. MEDDAHI *A dual-dual mixed formulation for nonlinear exterior transmission problems*, aparecerá en Mathematics of Computation (2000).
- [39] G.N. GATICA Y W.L. WENDLAND *Coupling of mixed finite elements and boundary elements for a hyperelastic interface problem*, SIAM J. Numer. Anal. **34**, 2335-2356 (1997).
- [40] V. GIRAULT Y P.A. RAVIART *Finite element methods for Navier-Stokes equations*, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio (1986).
- [41] D. GIVOLI *A finite element method for large domain problems*, Ph.D. Thesis, UMI Dissertation Services (1992).
- [42] M. GONZÁLEZ, S. MEDDAHI Y P. PÉREZ *Análisis numérico de un problema no lineal monótono en un dominio exterior*, XV Congreso de Ecuaciones Diferenciales Y Aplicaciones/V Congreso de Matemática Aplicada, Libro de Actas, Vol. II, 793-798, Vigo (1997).
- [43] D. GREENSPAN Y P. WERNER *A numerical method for the exterior Dirichlet problem for the related wave equation*, Archive for Rational Mechanics and Analysis **94**, 2, 179-192 (1966).
- [44] D.F. GRIFFITHS Y D.J. HIGHAM *Learning L^AT_EX*, SIAM (1997).
- [45] P. GRISVARD *Elliptic problems in nonsmooth domains*, Pitman (1985).
- [46] J. GWINNER Y E.P. STEPHAN *A boundary element procedure for contact problems in plane linear elastostatics*, Institut für Angewandte Mathematik Universität, Preprint, Hannover (1991).
- [47] W. HACKBUSCH *Integral equations: theory and numerical treatment*, Birkhäuser Verlag, Basel (1995).
- [48] H. HAN *A new class of variational formulations for the coupling of finite and boundary element methods*, J. Comp. Math. **8**, 223-232 (1990).
- [49] G.C. HSIAO *On boundary integral equations of the first kind*, J. Comp. Math. **7**, 121-131 (1989).

- [50] G.C. HSIAO *Some recent developments on the coupling of finite elements and boundary element methods*, Rend. Sem. Mat., Univ. Pol. Torino, Fascicolo Speciale, Numerical Methods (1991).
- [51] G.C. HSIAO, P. KOPP Y W.L. WENDLAND *A Galerkin collocation method for some integral equations of the first kind*, Computing **25**, 557-566 (1979).
- [52] G.C. HSIAO Y W.L. WENDLAND *A finite element method for some integral equations of the first kind*, J. Math. Anal. Appl. **58**, 449-481 (1977).
- [53] G.C. HSIAO Y S. ZHANG *Optimal order multigrid methods for solving exterior boundary value problems*, SIAM J. Numer. Anal. **31**, 680-694 (1994).
- [54] C. JOHNSON Y J.C. NÉDÉLEC *On the coupling of boundary integral and finite element methods*, Math. of Comp. **35**, 1063-1079 (1980).
- [55] C. JOHNSON Y V. THOMÉE *Error estimates for a finite element approximation of a minimal surface*, Math. of Comp. **29**, 343-349 (1975).
- [56] R. KRESS *Linear Integral Equations*, Springer-Verlag, New York-Berlin (1989).
- [57] A. KUFNER, O. JOHN Y S. FUČÍK *Function spaces*, Academia, Praga (1977).
- [58] L.D. LANDAU Y E.M. LIFSCHITZ *Teoría de la elasticidad*, Vol. VII del *Curso de Física teórica*, Reverté, Barcelona (1969).
- [59] M.-N. LEROUX *Equations intégrales pour le problème du potentiel électrique dans le plan*, C.R.A.S. **278**, 541-544 (1974).
- [60] M.-N. LEROUX *Méthode d'éléments finis pour la résolution numérique des problèmes extérieurs en dimension 2*, RAIRO **7**, 449-481 (1977).
- [61] J.L. LIONS *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Etudes Mathématiques, Dunod, Paris (1969).
- [62] J.L. LIONS Y E. MAGENES *Problèmes aux limites non homogènes et applications*, Vol. I, Dunod, Paris (1969).
- [63] B. LUCQUIN Y O. PIRONNEAU *Introduction au calcul scientifique*, Masson, Paris (1996).
- [64] L. LUSTERNIK Y V. SOBOLEV *Précis d'analyse fonctionnelle*, Mir, Moscú, (1989).

- [65] R.C. MACCAMY Y M. SURI *A time-dependent interface problem for two-dimensional eddy currents*, Quart. Appl. Math. **44**, 675-690 (1987).
- [66] S. MEDDAHI *Un método de acoplamiento entre elementos finitos y elementos de contorno*, VII Escuela de Otoño Hispano-Francesa sobre Simulación en Física e Ingeniería, Tomo III, 61-91 (1996).
- [67] S. MEDDAHI *An optimal iterative process for the Johnson-Nédélec method of coupling boundary and finite elements*, SIAM J. Numer. Anal. **35**, 1393-1415 (1998).
- [68] S. MEDDAHI Y M. GONZÁLEZ *Estimaciones del error para el sistema de Lamé en un dominio exterior*, XVI Congreso de Ecuaciones Diferenciales Y Aplicaciones/VI Congreso de Matemática Aplicada, Libro de Actas, Vol. II, 1221-1228, Las Palmas de Gran Canaria (1999).
- [69] S. MEDDAHI Y M. GONZÁLEZ *A fully discrete BEM-FEM method for an exterior elasticity system in the plane*. Aparecerá en el J. of Comput. and Appl. Maths (2000).
- [70] S. MEDDAHI, M. GONZÁLEZ Y P. PÉREZ *Error estimates for exterior nonlinear problems in the plane*, Technical report **98-17**, Departamento de Ingeniería Matemática, Universidad de Concepción, Chile (1998).
- [71] S. MEDDAHI, M. GONZÁLEZ Y P. PÉREZ *On a FEM-BEM formulation for an exterior quasilinear problem in the plane*. Aparecerá en SIAM J. Numer. Anal. (1999).
- [72] S. MEDDAHI Y F.J. SAYAS *A fully discrete BEM-FEM for the exterior Stokes problem in the plane*, Publicaciones del Seminario Matemático García de Galdeano, Univ. de Zaragoza (1998). Aparecerá en SIAM J. Numer. Anal. (1999).
- [73] S. MEDDAHI, J. VALDÉS, O. MENÉNDEZ Y P. PÉREZ *On the coupling of boundary integral and mixed finite element methods*, J. Comput. Appl. Maths **69**, 113-124 (1996).
- [74] J.C. NÉDÉLEC *Approximation des équations intégrales en Mécanique et en Physique*, Curso D.E.A., École Polytechnique (1977).
- [75] J. NEČAS *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques*, Academia, Praga, Masson, Paris (1967).

- [76] J. NEČAS *Introduction to the theory of nonlinear elliptic equations*, John Wiley & Sons, New York (1986).
- [77] J.T. ODEN *Qualitative methods in nonlinear mechanics*, Prentice-Hall, (1986).
- [78] C. POLIZZOTTO *A symmetric-definite BEM formulation for the elastoplastic rate problem*, *Boundary Elements IX* **2**, 315-334, C.A. Brebbia et al. eds., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio (1987).
- [79] R. RANNACHER *On finite element approximation of general boundary value problems in nonlinear elasticity*, *Calcolo* **17**, 175-193 (1980).
- [80] P.A. RAVIART Y J.M. THOMAS *Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles*, Masson, Paris (1992).
- [81] REAL ACADEMIA ESPAÑOLA *Ortografía de la lengua española*, Ed. Espasa Calpe S.A., Madrid (1999).
- [82] F.J. SAYAS *Asymptotic expansion of the error of some boundary element methods*, Ph.D. Thesis, Universidad de Zaragoza (1994).
- [83] F.J. SAYAS *Métodos de contorno*, Apuntes Curso de Doctorado (1996).
- [84] M. SCHULTZ *l^2 -error bounds for the Rayleigh-Galerkin method*, *SIAM J. Numer. Anal.* **8**, 737-748 (1971).
- [85] R. SCOTT *Finite element techniques for curved boundaries*, Thesis, Massachusetts Institute of Technology (1973).
- [86] R. SCOTT *Interpolated boundary conditions in the finite element method*, *SIAM J. Numer. Anal.* **12**, 404-427 (1975).
- [87] A. SEQUEIRA *The coupling of boundary integral and finite element methods for the bidimensional exterior steady Stokes problem*, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **5**, 356-375 (1983).
- [88] A. SEQUEIRA *On the computer implementation of a coupled boundary and finite element method for the bidimensional exterior steady Stokes problem*, *Math. Meth. in the Appl. Sci.* **8**, 117-133 (1986).
- [89] I.H. SLOAN *Error analysis of boundary integral methods*, A. Iserles ed., Acta Numerica, University Press, Cambridge, 287-339 (1992).

- [90] G. STRANG *Variational crimes in the finite element method*, Proc. Symp. Mathematical Foundations of the Finite Element Method with Applications to Partial Differential Equations, A.K. Aziz ed., Academic Press, New York, 689-710 (1972).
- [91] V. THOMÉE *Galerkin finite element methods for parabolic problems*, Springer Series in Computational Mathematics **25**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio (1997).
- [92] M.M. VAINBERG *The variational method and the method of monotone operators in the theory of nonlinear equations*, Mir, Moscú (1972).
- [93] W.L. WENDLAND *On asymptotic error estimates for the combined boundary and finite element methods*, Innovative Numerical Methods in Engineering, Edited by R.P. Shaw et al., Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, 55-70 (1986).
- [94] W.L. WENDLAND *On asymptotic error estimates for combined BEM and FEM*, Finite Element and Boundary Element Techniques from Mathematical and Engineering Point of View., Eds. E. Stein and W.L. Wendland, CISM Courses and Lectures **301**, Udine, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York-Tokio, 273-333 (1988).
- [95] W.L. WENDLAND *Boundary element methods for elliptic problems*, A.H. Schatz, V. Thomée and W.L. Wendland eds., Mathematical theory of finite and boundary element methods, Birkhäuser, Basel (1990).
- [96] Y. YAN Y I.H. SLOAN *On integral equations of the first kind with logarithmic kernels*, J. Int. Eqns. Appl. **1**, 549-579 (1988).
- [97] J. XU *Theory of multilevel methods*, Ph.D. thesis, Cornell University (1989).
- [98] J. XU *Two-grid discretization techniques for linear and nonlinear PDE*, SIAM J. Numer. Anal. **33**, 1759-1777 (1996).
- [99] A. ŽENÍŠEK *Finite element variational crimes in parabolic-elliptic problems*, Numer. Math. **55**, 343-376 (1989).
- [100] A. ŽENÍŠEK *Nonlinear elliptic and evolution problems and their finite element approximations*, Computational Mathematics and Applications, Academic Press, Londres (1990).

- [101] O.C. ZIENKIEWICZ, D.W. KELLY Y P. BETTESS *Marriage à la mode: the best of two words (finite elements and boundary integrals)* Energy methods in finite element analysis, chapter 5. Ed. R. Glowinski et al., pp. 81-107, John Wiley and Sons, Chichester, New York, Brisbane and Toronto (1979).
- [102] M. ZLÁMAL *The finite element method in domains with curved boundaries*. Int. J. Numer. Meth. Eng. **5**, 367-373 (1973).
- [103] M. ZLÁMAL *Curved elements in the finite element method I*, SIAM J. Numer. Anal. **10**, 229-240 (1973).
- [104] M. ZLÁMAL *Curved elements in the finite element method II*, SIAM J. Numer. Anal. **11**, 347-362 (1974).
- [105] M. ZLÁMAL *Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field*, RAIRO Anal. Numér. **16**, 161-191 (1982).
- [106] M. ZLÁMAL *Addendum to the paper Finite element solution of quasistationary nonlinear magnetic field*, RAIRO Anal. Numér. **17**, 407-415 (1983).